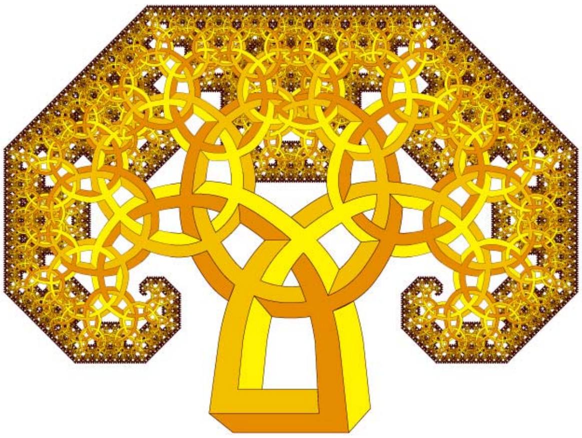
MINIMODULES VOOR 3 VWO



Bioethanol
Complex rekenen
Cryptografie
Digitaal!
Evolutie van het oog
Forensisch onderzoek
Fractals
Grafentheorie
Navigatie
Zonne-energie

Ontwikkeld voor

bètapartners

Door

Jeroen Borsboom
Hans van Dijk
Arjan de Graaff
Jeroen Heilig
Peter Keeven
Nicole de Klein
Wim Launspach
Henk Ubbels
De Praktijk
Wessel van de Hoef

Auteurs:

Jeroen Borsboom, PSG Jan van Egmond, Purmerend	Zonne-energie
De Praktijk, Amsterdam	Grafentheorie
Hans van Dijk, Pieter Nieuwland College, Amsterdam	Fractals, Digitaal!
Arjan de Graaf, Bonhoeffer College, Castricum	Navigatie
Jeroen Heilig, Petrus Canisius College, Alkmaar	Complex rekenen
Peter Keeven, Keizer Karel College, Amstelveen	Forensisch onderzoek
Nicole de Klein, Fons Vitae Lyceum	Cryptografie
Wim Launsspach, Hermann Wesselink College, Amsterdam	De evolutie van het oog
Henk Ubbels, Oscar Romero, Hoorn	Bioethanol

Eindredacteurs:

Hans van Dijk — *Pieter Nieuwland College, Amsterdam*
Amstel Instituut, Amsterdam

Wessel van de Hoef — *Fons Vitae Lyceum, Amsterdam*
Amstel Instituut, Amsterdam

Beste leerling,

Dit jaar een profiel kiezen, met nieuwe vakken?

De komende lessen maak je kennis met een stukje wiskunde dat niet in de schoolboeken staat: Fractals. Als je een natuurprofiel (natuur en gezondheid of natuur en techniek) kiest, krijg je misschien de gelegenheid ook het vak 'Wiskunde D' te kiezen. Fractals is een onderdeel dat bij wiskunde D aan de orde kan komen. Belangrijk is in ieder geval dat de manier van denken in deze lessen overeenkomt met wat er bij wiskunde D van je verwacht wordt.

In deze "minimodule" maak je kennis met Fractals en merkt dat deze vormen heel veel terug komen in de natuur. Je leert hoe ze gevormd worden en gaat ze zelf maken, eerst met de hand en daarna met het computerprogramma "WinFract".

Alle minimodules hebben dezelfde opbouw, wat het werken ermee vergemakkelijkt. Je zal in de modules veel icoontjes tegenkomen. Deze icoontjes hebben de volgende betekenis:

- 🗎 : Leestekst
- ⓘ : Achtergrondinformatie
- ✎ : Opdracht
- ☝ : Practicumhandeling
- 🖱 : Internetopdracht

We wensen je veel plezier bij het maken van deze minimodule. Hopelijk vind je de inhoud van deze minimodule leuk en interessant genoeg om in ieder geval een natuurprofiel te kiezen en misschien wel wiskunde D.

De auteurs

Inhoudsopgave

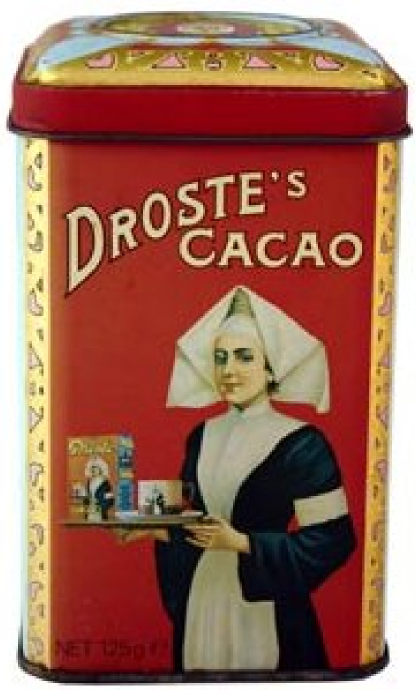
Studieplanner

Les	Datum	Stof	k/z	Omschrijving
1		Hst. 1	z	Lees de tekst en doe de internetopdrachten in tweetallen. Huiswerkopdrachten zelfstandig maken!
2		Hst. 2	k/z	Nabespreken huiswerkopdrachten. Uitvoeren alle internetopdrachten van hoofdstuk 2.

Hoofdstuk 1 Kennismaken met Fractals

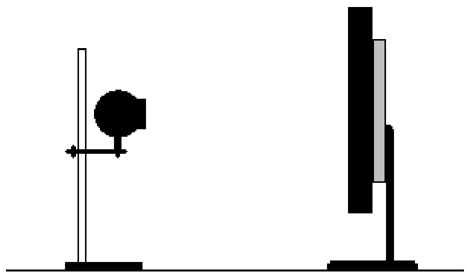
§ 1.1 Zelfgelijkvormigheid

Het Droste effect
Misschien ken je het voorraadbusje van ‘Droste’s cacao’, dat vroeger gebruikt werd. Je ziet een verpleegster die een dienblad met een pakje Droste’s cacao vasthoudt. Op dat pakje zie je dezelfde verpleegster weer. En als je goed kijkt, zie je dat die tweede verpleegster ook weer een dienblad vasthoudt met daarop een pakje Droste’s cacao….
Je begrijpt wel dat er maar een paar verpleegsters op het busje afgebeeld kunnen worden, want een vierde verpleegster zou zo klein worden dat je die toch niet ziet.
De afbeelding op het Droste’s cacao busje is een mooi voorbeeld van een patroon dat als het ware zichzelf herhaalt. In de afbeelding zie je (verkleind) dezelfde afbeelding, waarin je dezelfde afbeelding (verkleind) ziet, enz.
We noemen dat *zelfgelijkvormigheid*.



Video feedback (experiment)
Het ‘Droste effect’ zoals hierboven beschreven is op een heel eenvoudige manier tot stand te brengen met behulp van een webcam en een monitor of een videocamera met een TV-scherm. Je docent (e) zal deze demonstratie geven.

Zet de webcam of andere camera recht voor de monitor of het TV-scherm staat. Zorg ervoor dat de camera gericht is op datgene wat de camera op het scherm zet.
Wat je bij dit proefje ziet noemt men wel *video feedback*. Je snapt wel waarom: wat op het scherm verschijnt, wordt direct door de camera waargenomen, zodat dat ook weer op het scherm verschijnt, enz.



Als de camera niet te dicht bij het scherm opgesteld staat, zie je op het scherm iets wat op het Droste effect lijkt (zie de foto rechts)
Als de camera dichter bij het scherm komt, kunnen er allerlei leuke kleurige effecten ontstaan.

§ 1.2 Fractals maken

Wat je op het Droste’s cacao busje en het scherm bij de video feedback ziet, zijn voorbeelden van *fractals*. Bij fractals heb je altijd te maken met *zelfgelijkvormigheid*.
In de wiskunde bestaan heel veel figuren waarin je gelijkvormigheid aantreft. Al meer dan honderd jaar zijn veel wiskundigen in de weer met fractals. Dat doen ze niet alleen omdat ze vinden dat de wiskunde ervan zo mooi is, maar ook omdat fractalachtige structuren in de natuur blijken voor te komen: je vindt ze bij biologie, scheikunde, natuurkunde en aardrijkskunde. Fractals worden tegenwoordig ook gebruikt om animatiefilms te maken.

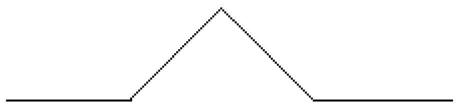
Fractals tekenen
Hoe maak je zelf een fractal op papier?
Een wiskundige tekent altijd eerst een eenvoudige figuur, bijvoorbeeld een lijnstuk. Vervolgens gaat hij of zij er iets mee doen, een soort recept. Dat recept wordt herhaald. En het wordt nog eens herhaald….
Als het een geschikt recept is (dat kan gebaseerd zijn op een eenvoudige formule), ontstaat er uiteindelijk een fractal. Uiteindelijk……?

Een wiskundige heeft er geen moeite mee om te zeggen dat het recept ‘tot in het oneindige’ herhaald wordt! Wij vinden het genoeg om een paar keer het recept te herhalen, zodat de vorm van de fractal zichtbaar wordt. Als het recept heel vaak uitgevoerd moet worden, kun je dat beter aan een computer overlaten. Vandaar ook dat het onderzoek naar eigenschappen van fractals door de komst van de computer (na de tweede wereldoorlog) pas goed op gang gekomen is.

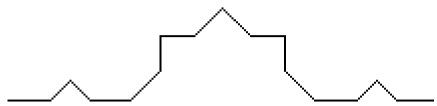
Voorbeeld 1 – Fractal van Koch

Je tekent een lijnstuk….

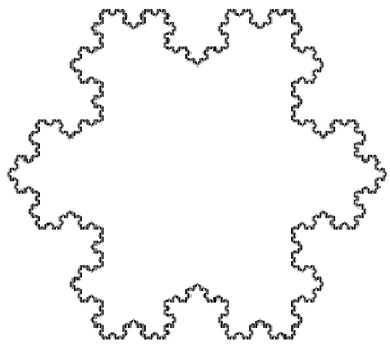
Je verdeelt het lijnstuk in drie stukjes en laat het middelste stukje weg. Je ‘overbrugt’ het ontbrekende deel met twee lijnstukken die elk gelijk zijn aan de twee overgebleven lijnstukjes…..



Dit recept pas je toe op elk van de vier lijnstukjes die je nu hebt. Dan krijg je deze figuur….

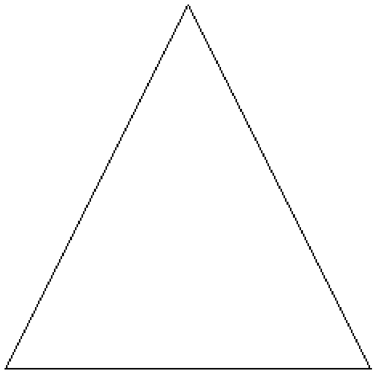


Hiernaast zie je het zogenaamde *Koch-eiland* dat op een vergelijkbare manier gemaakt is. Een bijzondere eigenschap van dit Koch-eiland is dat de oppervlakte een bepaalde waarde heeft (hangt er natuurlijk van af hoe groot je het eiland tekent), maar de omtrek is *oneindig groot!* Als je ten minste de moeite genomen hebt het recept oneindig vaak uit te voeren….

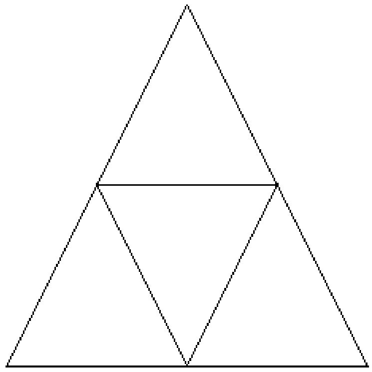


Voorbeeld 2 – Fractal van Sierpinski

Je ziet hiernaast een gelijkbenige driehoek:



In de gelijkbenige driehoek wordt een nieuw driehoekje getekend, zodat er vier driehoekjes ontstaan:



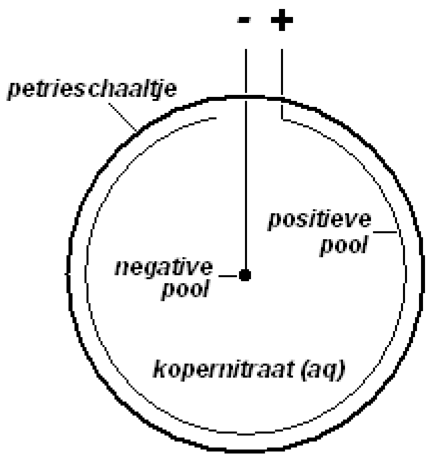
1) Herhaal dit *recept* zo vaak mogelijk. Dat wil zeggen: teken …
- in de buitenste drie ontstane driehoeken (hierboven) drie nieuwe driehoeken met de punt omlaag,
- *zolang dat mogelijk is*, op dezelfde manier steeds opnieuw driehoekjes.

Als je klaar bent met de opdracht heb je *de Zeef van Sierpinski* getekend. Dat deze figuur een fractal is, kun je je wel voorstellen. Als je 'inzoomt' op een deel van de figuur (je vergroot een willekeurig driehoekje), dan krijg je weer hetzelfde patroon te zien. De zelfgelijkvormigheid kan heel mooi duidelijk gemaakt worden met de computer. In de volgende les zie je hoe dat zichtbaar wordt bij deze Zeef van Sierpinski.

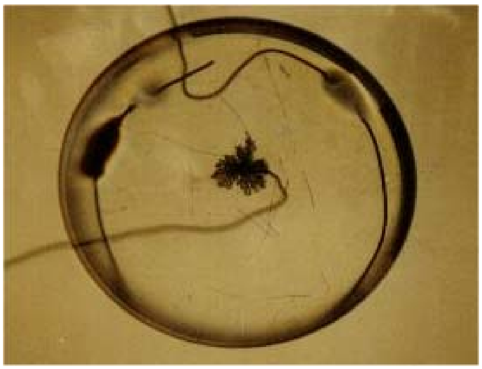
§ 1.3 Fractals in de natuur

Dat fractals niet alleen bestaan in de hersens van een wiskundige, zul je zien in deze paragraaf. In veel andere vakken dan wiskunde kom je fractalachtige structuren tegen. Kijk maar op de volgende bladzijde.

Scheikunde (demonstratie)
Je hebt vast wel eens van *elektrolyse* gehoord. Als je een elektrische stroom door water laat gaan, ontstaan waterstofgas (bij de negatieve pool) en zuurstofgas (bij de positieve pool). Water ontleedt (verdwijnt), maar er komen nieuw stoffen voor in de plaats. Wat heeft dit met fractals te maken?



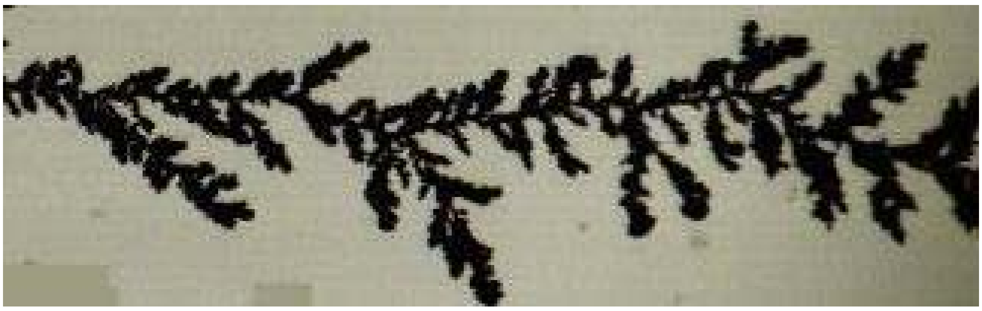
Hiernaast zie je de het bovenaanzicht van de opstelling voor een elektrolyse experiment. In het petrischaaltje bevindt zich een oplossing van kopernitraat. De positieve pool (elektrode) heeft de vorm van een cirkel, de negatieve pool (elektrode) heeft de vorm van een staafje dat in de oplossing steekt. De hele opstelling is door de docent(e) op een overheadprojector geplaatst, zodat je goed kunt zien wat er gebeurt.



Als je goed kijkt, zie je dat na enige tijd bij de negatieve pool in het midden zuiver koper ontstaat. Dat koper heeft de vorm van *dendrieten* (dendriet betekent boompje).

Waarom hebben we hier met een fractal te maken…?

Hieronder zie je hoe één zo'n koperdendriet er onder een microscoop uitziet (in werkelijkheid is de koperdendriet maar een paar mm lang).



2) Vertel in eigen woorden waarom je een koperdendriet kunt beschrijven als een fractal.

Aardrijkskunde

Je bent misschien wel eens in Noorwegen geweest. Dat land heeft een heel lange kust met inhammen, *fjorden* genoemd. Hoe lang is die kust (ongeveer)?
Van grote hoogte bekeken zou je denken dat de kust wel een paar duizend km lang is. Maar als je van steeds kleinere hoogte naar de kust van Noorwegen kijkt, zie je steeds meer inhammen verschijnen en als je de kust van Noorwegen die inhammen laat volgen, is de kust veel langer geworden.
En als je nog meer inzoomt op die inhammen, dan blijken die inhammen ook weer inhammetjes te hebben…. En dan zie je ook nog grote rotsblokken waar je omheen zou kunnen gaan, zodat de kust nog langer wordt. Zo kom je op een lengte van de kust van Noorwegen die vele tienduizenden kilometers lang is!
Dit doet denken aan de fractal van Koch, waar de omtrek zelf oneindig lang is.

Biologie

3) Vertel in eigen woorden waarom je een stronkje broccoli kunt beschrijven als een fractal.

4) Vertel in eigen woorden waarom je een ammoniet kunt beschrijven als een fractal.

Natuurkunde

✐ 5) Vertel in eigen woorden waarom je een bliksem kunt beschrijven als een fractal.

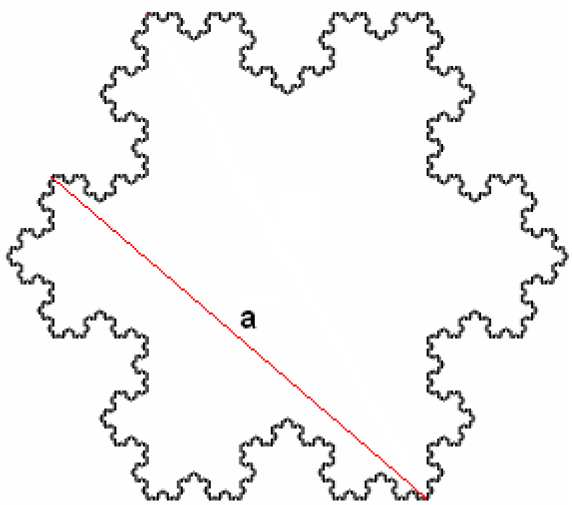
✐ 6) Bedenk zelf ook nog een paar voorbeelden van wat je in de natuur zou kunnen beschrijven als een fractal. Maak ook bij elk zelf bedacht voorbeeld een schets en leg uit waarom in die schets een fractal te herkennen is.

Huiswerkopdrachten

7) Oppervlakte van het Koch-eiland

Je bent in les 1 het Koch-eiland tegengekomen. Misschien wel tot je grote verbazing heeft deze fractal een oneindig lange omtrek. De oppervlakte is niet oneindig. Sterker nog: je kunt die uitrekenen met deze formule:

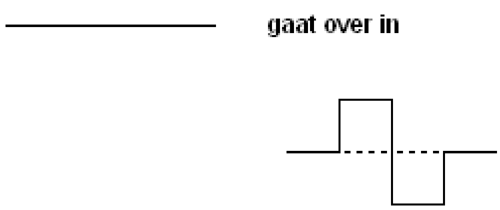
$$opp. = \frac{2}{5} a^2 \sqrt{3}$$



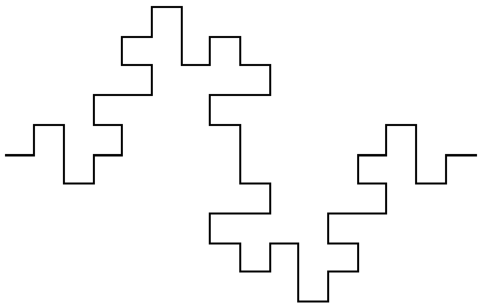
waarin a de lengte is van het lijnstuk a dat je in het Koch-eiland getekend ziet.
Meet eerst hoe lang a is en bereken dan de oppervlakte in cm^2 van het Koch-eiland.

Het Minkowski-eiland

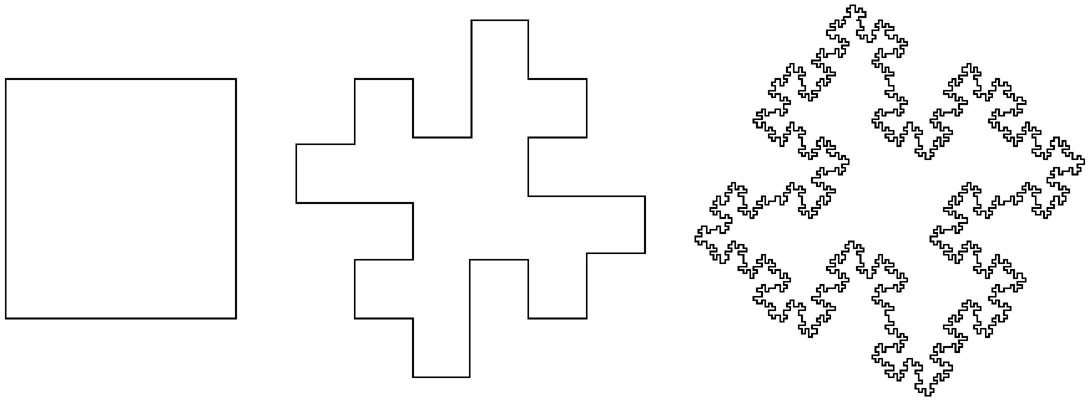
Een Minkowski-eiland ontstaat als volgt: een lijnstuk wordt eerst in vier gelijke lijnstukjes verdeeld. De middelste twee lijnstukjes laten we weg. Daarvoor in de plaats komen zes van die lijnstukjes op de manier die je hiernaast ziet (het middelste verticale lijnstuk bestaat eigenlijk uit twee van die kleine lijnstukjes):



In de volgende stap ondergaat elk van die acht lijnstukjes dezelfde bewerking: elk lijnstukje wordt verknipt tot weer acht (uiteraard nog) kleinere lijnstukjes. Je krijgt dan de figuur die je hiernaast ziet.



Als je niet met een enkel lijnstuk begint en daar het recept op toepast, maar met een vierkant, dan krijg je na een paar keer de figuur die je op de volgende bladzijde weergegeven ziet: het eiland van Minkowski. Je moet wel bedenken dat je eigenlijk oneindig vaak dat recept moet herhalen om een echte fractal te krijgen….



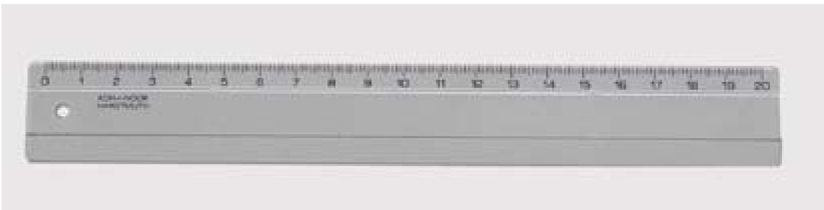
vierkant na 1 keer…. na een paar keer…

8) Beredeneer hoe groot de oppervlakte is van een Minkowski-eiland, als de oppervlakte van het vierkant waaruit het eiland ontstaan is, gelijk is aan 10 cm^2.

9) Wat kun je (vermoedelijk) zeggen over de omtrek van het Minkowski-eiland?

Liniaal

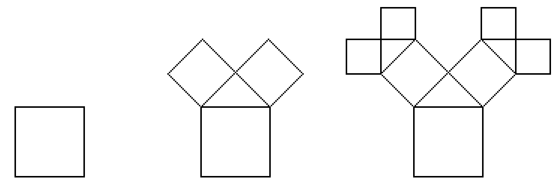
Hoewel je dat waarschijnlijk nooit beseft hebt, zie je op een liniaal ook een fractal!



10) Leg dat uit.

De boom van Pythagoras

Je hebt de boom van Pythagoras gezien. De computer tekent in een onderdeel van een seconde een heleboel vierkantjes en driehoekjes. Hiernaast zie je hoe de boom ontstaat.

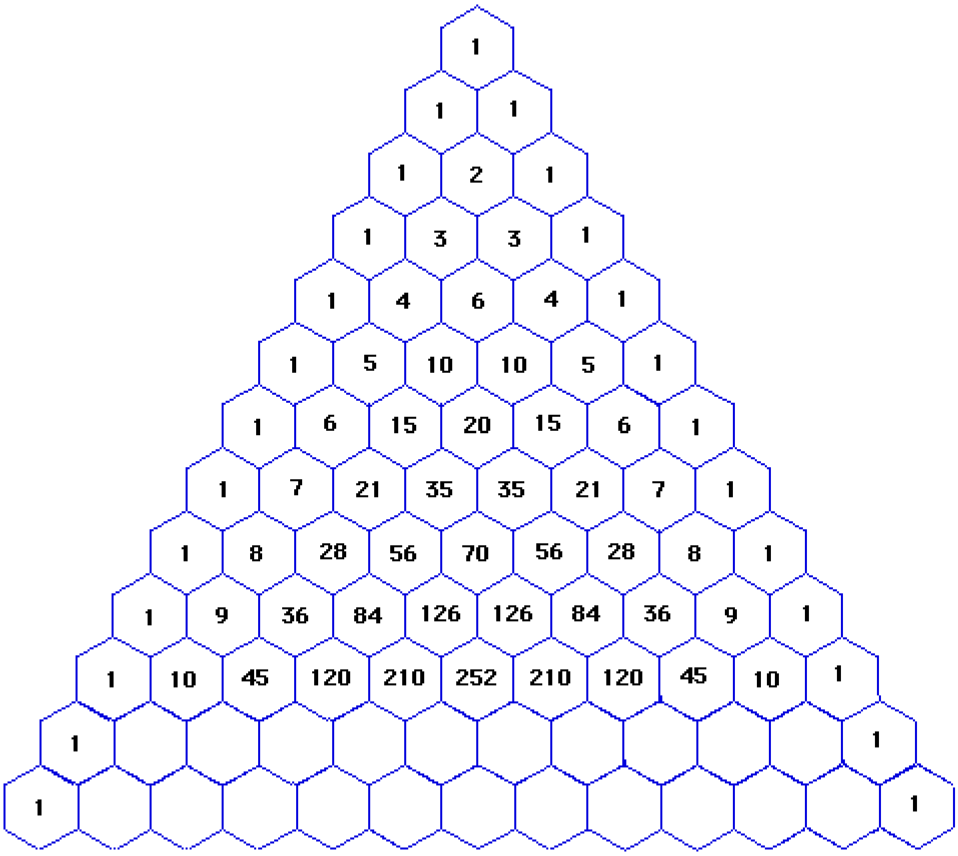


0^e generatie 1^e generatie 2^e generatie

11) Stel dat de computer de 10^e generatie tekent. Hoeveel vierkantjes zitten er dan in de boom?

De driehoek van Pascal

Als je het volgende product uitrekent: $(a + b)^2$, dan vind je $a^2 + 2ab + b^2$. De getallen die je hierin aantreft zijn 1, 2 en 1 (maar de 1 schrijf je natuurlijk nooit). De getalletjes 1, 2 en 1 zijn de coëfficiënten van a^2, ab en b^2. Als je $(a + b)^3$ uitschrijft, dan vind je als uitkomst $a^3 + 3ab^2 + 3b^2a + b^3$. Daarin zitten de coëfficiënten 1, 3, 3 en 1. Zo kun je nog een tijdje doorgaan…
Als je van al die producten $(a + b)^2$, $(a + b)^3$, $(a + b)^4$, $(a + b)^5$, enz. de coëfficiënten netjes onder elkaar zet, krijg je de 'pyramide van Pascal'.



12) Ga na dat de bovenste twee regels kloppen.

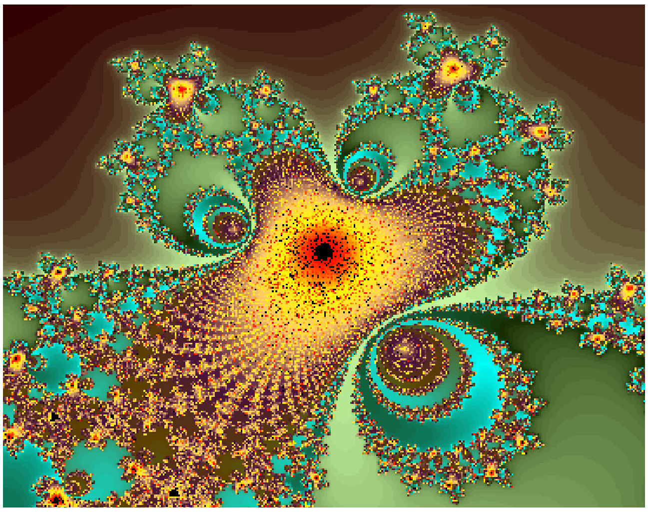
Als je goed kijkt, zie je dat je elke regel met getallen kunt vinden door steeds een tweetal getallen erboven bij elkaar op te tellen.

13) Vul in de onderste twee regels de coëfficiënten in.

Wat heeft deze driehoek van Pascal nu met fractals te maken?

14) Kleur in de pyramide met een dikke viltstift elk vakje met een *oneven* getal blauw (of andere donkere kleur). Welke figuur zie je ontstaan?

Opgave 6 – De fractals van Julia



De fractals van Gaston Julia worden door veel mensen beschouwd als de mooiste die er ooit gemaakt zijn. Misschien heb je in Winfract al kennis gemaakt met deze soort fractals. De fractals van Julia zijn meestal gebaseerd op zogenaamde *complexe getallen.* Complexe getallen zijn heel eigenaardig!

Het eenvoudigste complexe getal geven we aan met de letter *i* (eigenlijk de eerste letter van imaginair). Het eigenaardige van het getal *i* is dat het kwadraat ervan gelijk is aan -1. Hoe kan dat? Je vindt dit vast heel gek, maar bedenk dat je vroeger ook kennismaakte met negatieve getallen en toen ook dacht: hoe kan dat nou, ‘minder dan nul’?

Kijken of je een beetje kunt rekenen met complexe getallen…

✐ 15) Bereken: $i^2 + 1$
✐ 16) Bereken: i^4
✐ 17) Bereken: $(2 - i)(2 + i)$

Hoofdstuk 2 Fractals bekijken en maken met de computer

Een fractal tekenen kost heel veel tijd. Je moet namelijk een bepaalde handeling (volgens een vast recept) heel veel keren herhalen om de fractal vorm te geven. Een computer is een heel handig hulpmiddel om fractals mee te tekenen, want een computer doet dat verschrikkelijk snel.

§ 2.1 Fractals bekijken: animaties en video's

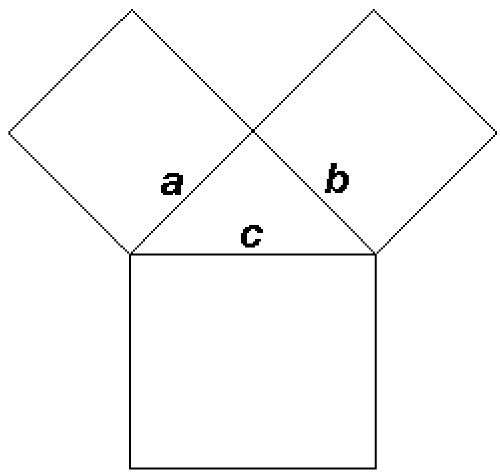
Animaties
In de vorige les hebben we de Koch-fractal genomen als voorbeeld van hoe je een bepaald recept gebruikt om een fractal te maken.

1) Ga naar de volgende URL:
http://www.pieternieuwland.nl/Menu_Items/Projecten/minimodules/fractals.htm
In het lijstje kies je de Koch-animatie. Je ziet hoe snel een computer kan tekenen!

2) Bekijk ook de animatie van de Sierpinski fractal. Je ziet hoe de computer steeds opnieuw deze fractal tekent, maar steeds iets groter (de computer zoomt in). Daardoor zie je duidelijk de zelf-gelijkvormigheid van deze fractal.

3) In hetzelfde lijstje vind je bij 'Mandelbrot' een animatie van een (wereldberoemde) fractal waar de computer op inzoomt. Bekijk die animatie en kijk weer of je de zelfgelijkvormigheid herkent.

Pythagoras
Je kent natuurlijk de stelling van Pythagoras wel. Wat heeft die met fractals te maken? Hiernaast zie je een vierkantje waar een rechthoekige driehoek en twee kleinere vierkanten op getekend zijn. De oppervlakte van het grootste vierkant is natuurlijk c^2. De oppervlakte van de andere twee vierkanten zijn b^2 en a^2. Het grappige is nu dat voor het ingesloten driehoekje geldt:



$$a^2 + b^2 = c^2$$

Dus zijn de oppervlakten van de twee kleinere vierkanten samen gelijk aan die van het grote vierkant. Terug naar de fractals…

Het figuurtje hierboven kun je gebruiken om een fractal van te maken. Het enige dat je hoeft te doen is op beide vierkantjes weer een rechthoekige driehoek te tekenen met daar bovenop weer twee keer twee vierkanten. Maar ja, daar gaat een hoop tijd in zitten!
We laten het aan de computer over om de zogenaamde *boom van Pythagoras* te maken…

4) In het lijstje vind je een link naar een site waar de Pythagorasboom voor je getekend wordt. Probeer met een Pythagorasboom iets te maken dat op de stronk broccoli (blz. 9) lijkt. Print het resultaat!

Video´s
De elektrolyse van een kopernitraatoplossing is enkele jaren geleden uitvoerig bestudeerd voor een paar leerlingen van het Pieter Nieuwland College. Zij maakten door een microscoop een video opname van het ontstaan van koperdendrieten bij de elektrolyse van een kopernitraatoplossing.

5) Bekijk de eerste drie minuten van deze video bij ´scheikundeproef 1´. Je ziet de dendrieten groeien! Bedenk dat de dendrieten (ook wel chemische fractals genoemd) in werkelijkheid maar een paar mm lang zijn.

§ 2.2 Fractals maken met WinFract

Kennismaking met Winfract

Als het goed is, heb je de beschikking over het computerprogramma *Winfract*, waarmee je zelf fractals kunt laten tekenen op het scherm. Je zult merken dat het computerprogramma de fractals ook in fraaie kleuren kan weergeven. Als je *Winfract* nog niet hebt, kun je het hier downloaden: http://spanky.triumf.ca/www/fractint/getting.html

6) Start het programma WINFRACT. Op het scherm verschijnt al een fractal, namelijk die van Mandelbrot.

Merk op dat het een tijdje duurt voordat de fractal helemaal getekend is. Nou ja, helemaal… Voor een wiskundige is een fractal pas af, als het recept voor die fractal *oneindig vaak* herhaald is. Een computer stopt met het tekenen, zodra het aanbrengen van nog kleinere details geen zin heeft doordat het beeldscherm nu eenmaal uit lichtstipjes (pixels) is opgebouwd. Iets tekenen dat kleiner is dan een pixel kan natuurlijk niet!

7) Gebruik de ‘zoom’ mogelijkheid om in de Mandelbrotfractal de zelfgelijkvormigheid te vinden. Dat doe je door bij ‘View’ de ‘Zoom In Box’ in te schakelen (misschien is-ie al ingeschakeld). Je selecteert een gebiedje in de fractal (je tekent een rechthoekje) en je dubbelklikt in dat gebied. Je kunt dat een paar keer achter elkaar doen: inzoomen op een gebied waar je net op ingezoomd hebt (je moet steeds hetzelfde patroon vinden).

8) Zoek bij ‘Fractals’ onder ‘Fractal Formula’ naar ‘sierpinski’. Sla de mogelijkheid iets aan de instellingen te veranderen maar over. Lijkt deze fractal een beetje op wat je in les 1 getekend hebt?

De elektrolyseproef
In les 1 heb je gezien dat bij dat scheikundeproefje (de elektrolyse van kopernitraat) bij de negatieve aansluiting dendrieten ontstaan: koperdeeltjes bewegen in de oplossing, komen in de buurt van de negatieve pool en plakken daar aan vast. Die negatieve pool in het midden wordt steeds groter, doordat er steeds meer koperdeeltjes aan vast blijven plakken. Je hebt gezien dat daarbij 'dendrieten' ontstaan, op kleine boompjes lijkende structuren.

8) Zoek in Winfract bij 'Fractals' onder 'fractal formula' naar 'diffusion'. De fractal die je ziet ontstaan, komt tot stand doordat denkbeeldige deeltjes zigzaggend over het scherm bewegen. Als ze tegen het middelpunt van het scherm komen, komen ze tot stilstand. Dat middelpunt groeit daardoor langzaam aan, het wordt groter. Door de rommelige beweging van de (nog) losse deeltjes zie je structuren ontstaan die lijken op de dendrieten van het scheikundeproefje!

Eigenlijk heb je nu met de computer iets nagemaakt dat in de natuur ook voorkomt. Dat gebeurt bij wetenschappelijk onderzoek heel vaak: we noemen dat *modelleren.* Door te modelleren kun je heel vaak sneller dingen te weten komen dan wanneer je echte experimenten doet.

9) Je gaat nu een beetje modelleren!
Je kiest weer de 'diffusion' fractal, maar nu moet je wat aan de instellingen veranderen. Kies voor de 'bordersize' het getal 200 en kies bij 'Type' het getal 1 ('Falling'). Je moet weten dat nu de zigzaggende deeltjes van boven naar beneden dwarrelen en dat ze stoppen met bewegen zodra ze bij de onderkant van het scherm terecht komen. Je kunt je makkelijk voorstellen dat je nu als het ware hetzelfde scheikundeproefje doet, maar nu met een negatieve elektrode die langwerpig is (de vorm van een lijn heeft). Wat denk je, zullen er weer 'dendrieten' ontstaan of ontstaan er andere structuren?
Onderzoek met Winfract of je vermoeden juist is. Schrijf hieronder je conclusie op:

Dat de koperdendrieten ook in het echt ontstaan, als je een langwerpige negatieve elektrode neemt, dat zie je op de foto hiernaast (koperdendrieten op een staafvormige negatieve elektrode). Het plaatje heeft verdacht veel weg van bomen en struiken, maar het zijn echt koperdendrieten van een paar mm lang.

10) Bekijk in Winfract diverse soorten fractals. Probeer ook eens iets aan de instellingen te veranderen en kijk wat het effect is op de vorm van de fractal. Welke fractal vind je het allermooiste? Print deze fractal uit!

§ 2.3 Waarom heten fractals fractals?

Een belangrijk ding zijn we (bijna) vergeten! Waarom heten fractals eigenlijk zo?
Het woord *fractal* komt uit het Latijn en betekent *gebroken*. Wat er nou zo 'gebroken' is bij fractals, dat gaat voor deze lesbrief eigenlijk te ver om dat helemaal uit te leggen!
Nou ja, een korte toelichting dan…

Je hebt in de wiskunde vast wel eens van het woord *dimensie* gehoord. Een lijn heeft een dimensie van 1, je kunt op een lijn maar één kant op, er is maar één richting. In een vlak heb je twee richtingen, dus een vlak heeft een dimensie van 2. Je snapt wel dat een kubus (maar ook een bol, bijv.) een dimensie van 3 heeft.

Het leuke van fractals is nou dat de dimensie ervan in sommige gevallen *geen geheel* getal is. De fractal van Koch, waar je mee kennisgemaakt hebt, heeft een dimensie van 1,26. De dimensie van de Zeef van Sierpinski is 1,58…. Deze fractals hebben dus een vreemde eigenschap. Je zou kunnen zeggen: ze zijn dus *méér* dan een lijn en *minder* dan een vlak. Wiskundigen vinden het leuk om dit soort dingen (gebroken dimensies) te onderzoeken. Heel veel interessante wiskundige problemen kom je bij het vak wiskunde-D tegen.

§ 2.4 Afsluiting: Fractal Art

Wat je nu weet…
Je hebt nu een idee van wat een fractal is:

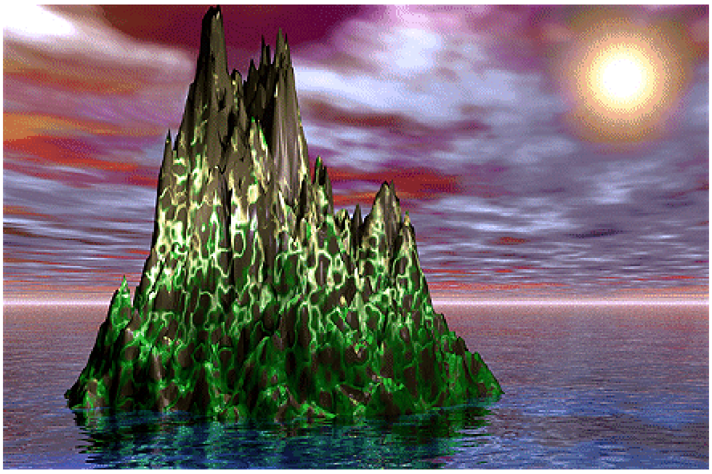
- Het is een figuur die ontstaat door het (letterlijk) eindeloos herhalen van een bepaald recept (meestal gebaseerd op een eenvoudige formule).
- In elke fractal vind je een bepaalde *zelfgelijkvormigheid*: een patroon herhaalt zich in een patroon, enz.
- Wiskundige fractals hebben bijzondere eigenschappen: ze kunnen bijvoorbeeld een *gebroken dimensie* hebben of een *oneindig grote omtrek*.
- Je vindt in de natuur vormen die je met fractals kunt beschrijven.

Maar…hebben fractals ook nut? Kun je er wat mee doen?

Fractal Art
Met de computertechniek van heden worden fractals wel degelijk op een zinnige manier gebruikt.
Er zijn mensen die fractals gebruiken om hun artistieke kwaliteiten te laten zien.

11) Kijk eens op: http://www.pieternieuwland.nl/Menu_Items/Projecten/minimodules/fractals.htm in het lijstje onder 'fractal-art'. Je moet vooral de fractalkunstwerken openen die van geluid voorzien zijn.
Zijn ze niet prachtig?

Animatiefilms



De laatste tien jaar worden grote bioscoopfilms voor een groot deel (en soms helemaal) met de computer gemaakt. Daarbij worden technieken toegepast die ook gebruikt worden om fractals te tekenen (zoals met Winfract). Men spreekt dan van *computergraphics.*

Met het computerprogramma POV-RAY (dat gratis op internet te krijgen is) kun je zelf landschappen maken die gebaseerd zijn op fractals.

Op http://www.pieternieuwland.nl/Menu_Items/Projecten/minimodules/fractals.htm vind je bij 'fractals' waar je POV-RAY kunt downloaden, zodat je er thuis mee kunt knutselen. Op het net zijn diverse Nederlands- en Engelstalige handleidingen te vinden.

Na deze minimodule / eindopdracht

Als je fractals interessant vindt, kun je buiten de lessen om - maar in overleg met je docent(e) – misschien zelf onderzoek doen. Onderzoek doen is in het nieuwe vak NLT (Natuur, Leven en Technologie) heel belangrijk. Gelukkig maar, want onderzoek doen in de wiskunde en natuurwetenschappen is heel erg leuk!
Wat je zou kunnen doen:

- oefenen met POV-RAY of Chaos-Pro en daarmee een prachtig fractal-landschap maken.
  (Chaos-Pro is ook gratis te downloaden:
  kijk op http://www.pieternieuwland.nl/Menu_Items/Projecten/minimodules/fractals.htm
  in de lijst bij 'Chaos-Pro').
- de elektrolyse van een oplossing van loodnitraat bestuderen onder een microscoop. De vorm van looddendrieten is heel bijzonder. We verklappen het niet…
- aan je docent(e) vragen naar een geschikt boekje over fractals, zodat je meer te weten komt over bijzondere wiskundige eigenschappen van fractals.

Van je docent krijg je hoogstwaarschijnlijk nog een eindopdracht!