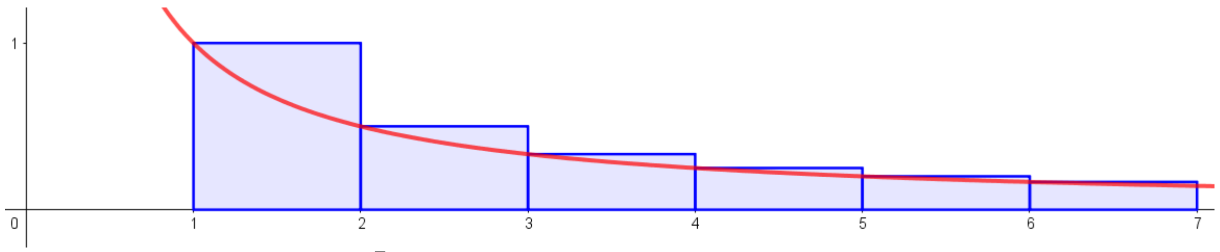
Sommeerbare rijen

1 Gegeven is de rij $u_n = \frac{1}{n}$ voor $n \geq 1$. De som van de eerste n getallen noemen we S_n. Zo is S_3 de som van de eerste drie getallen:

$$S_3 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$$

a Bereken S_6 zonder rekenmachine.

De figuur hieronder toont de grafiek van $y = \frac{1}{x}$ en zes rechthoeken met breedte 1 waarvan het hoekpunt linksboven op de grafiek ligt.



b Welk getal is groter: S_6 of $\int_1^7 \frac{1}{x}dx$. Verklaar het antwoord met hulp van de figuur.

c Bereken $S_6 - \int_1^7 \frac{1}{x}dx$ algebraïsch. Rond het antwoord af op twee decimalen.

d Toon aan dat voor ieder $n \geq 1$:

$$S_n > \ln(n+1)$$

e Is de rij u_n sommeerbaar? Verklaar je antwoord.

2 Gegeven is de rij $v_n = \frac{1}{n^2}$ voor $n \geq 1$. De som van de eerste n getallen noemen we weer S_n

a Toon aan met een integraal: $S_n < 2 - \frac{1}{n}$

b Is de rij v_n sommeerbaar?

3

a Is de rij $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ met $n \geq 1$ sommeerbaar? Verklaar je antwoord met een integraal.

b Is de rij $u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}$ met $n \geq 1$ sommeerbaar? Verklaar je antwoord met een integraal.

4 Voor welke α is de rij $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$ met $n \geq 1$ sommeerbaar? Verklaar je antwoord

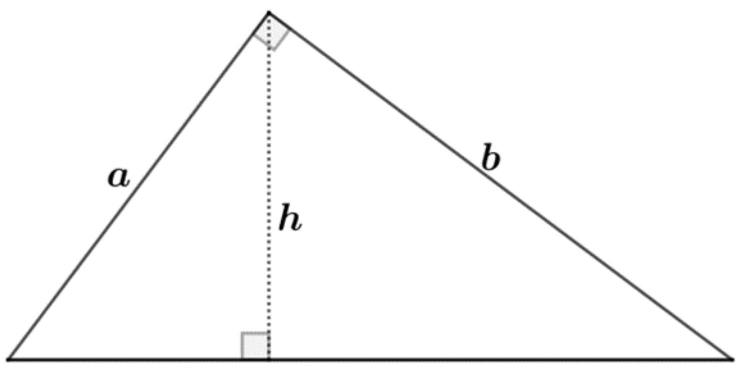
Voorbereidingen voor het bewijs

5

a De omtrek van een cirkel is 4. Bereken de diameter exact.

b Een rechthoekige driehoek heeft rechthoekszijden 5 en 12. Bereken de hoogte die hoort bij de schuine zijde.

6 De punten O, A en B liggen op de cirkel met middelpunt M. Het lijnstuk OB is een middellijn en $\angle OBA = \alpha$.
Toon aan: $\angle OMA = 2\alpha$.
Dit is de *Stelling van de Middelpuntshoek*



7 Zie de figuur hiernaast.
Toon aan:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{h^2}$$

Dit is de *Inverse Stelling van Pythagoras.*

8 Bewijs de *Stelling van Thales*: als het middelpunt van de omgeschreven cirkel van een driehoek op een zijde van de driehoek ligt dan is deze driehoek rechthoekig.

9 Gegeven zijn:
$S = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \quad \dots$
$O = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots$ (de oneven kwadraten)
$E = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \quad \dots$ (de even kwadraten)
Toon aan:

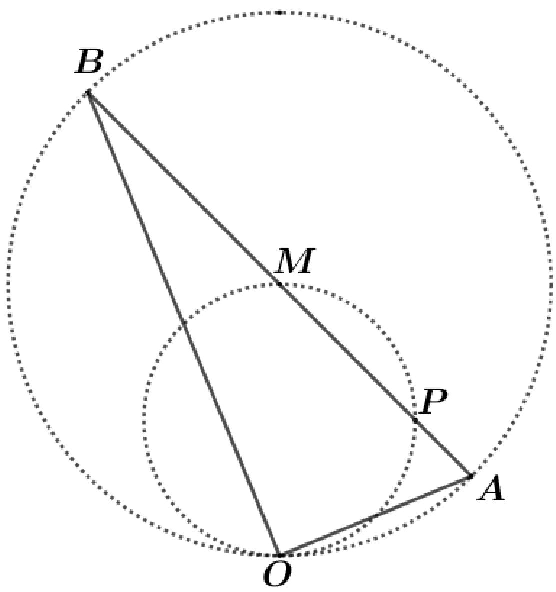
a $E = \frac{1}{4} S$

b $S = \frac{4}{3} O$

10 In de figuur raken de twee cirkels elkaar in O en bevat de kleine cirkel het middelpunt M van de grote.

a Toon aan: $\frac{1}{OP^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$

b Toon aan dat de cirkelboog OP even lang is als de cirkelboog OA.



Het bewijs

Hier staat de video:

https://www.youtube.com/watch?v=d-o3eB9sfls