

# Docentenhandleiding

## Over de inhoud

DisWis is een lessenserie discrete wiskunde/grafentheorie voor 5 en 6 vwo leerlingen met wiskunde b1,2 en is ontwikkeld door De Praktijk en professor Alexander Schrijver van het Centrum voor Wiskunde en Informatica in Amsterdam.

DisWis is een lessenserie van 40 slus en zeer geschikt als invulling van het zebrablok of als een wiskunde D-module. Vier weken lang komen wiskundestudenten samen met u vier uur in de week DisWis geven in uw bovenbouwklas. Meer informatie over DisWis kunt u vinden op [www.praktijk.nu](http://www.praktijk.nu) onder het kopje "DisWis".

De DisWis *minimodule* is een lesbrief van 2 lesuren met als onderwerp grafentheorie. In het eerste uur wordt op steeds formelere wijze naar het begrip "graaf" gekeken. Het tweede uur wordt een stelling uit de discrete wiskunde behandeld. Het gaat om de stelling van Ramsey. Alexander Rinnooy Kan gebruikte toevallig dezelfde stelling om Joris Luyendijk een toegankelijk stukje theorie uit zijn vakgebied te laten zien tijdens de Zomergasten-uitzending van 19 augustus.

Dit is de docentenhandleiding van de DisWis minimodule. Deze module is gemaakt voor vwo-leerlingen in klas 3. De module laat in een blokkur (of twee losse uren) zien welke wiskunde de leerlingen kunnen verwachten in het nieuwe vak wiskunde D.

In deze handleiding vindt u de benodigdheden voor het geven van deze minimodule, een overzicht van de behandelde stof, een tijdschema, de volledige inhoud van de lessenserie en de antwoorden van de opgaven. In de kantlijn vindt u de verwijzingen naar de tijdsindeling. De leerlingen krijgen een werkblad met beknopte informatie en de opgaven. U kunt ervoor kiezen om de pagina's met theorie van de docentenhandleiding te kopiëren en aan de leerlingen uit te delen.

## Organisatie (algemeen)

Benodigdheden:

- Whiteboard;
- Stiften in drie verschillende kleuren;
- Sheets DisWis minimodule en overheadprojector of computer en beamer;
- Werkblad DisWis minimodule voor elke leerling;
- Docentenhandleiding DisWis minimodule voor de docent;
- *Eventueel theoriebladen voor elke leerling.*

Overzicht van behandelde stof:

- Introductie van Diswis minimodule;
- Roosterpuzzels;
- Introductie van grafen;
- De vriendschap stelling van Ramsey;
- Het pigeon hole principle.

**Doelstelling: we hopen de leerlingen te amuseren en verbazen met grafentheorie.**

Lees ter voorbereiding op de les de docentenhandleiding helemaal door, het bevat een aantal tips en aanwijzingen voor het bespreken van de opgaven en verschillende concepten.

Verdeel de klas voor aanvang van de les in groepjes van vier leerlingen. Deze groepjes kunnen samen overleggen over de opgaven en discussievragen. Elke leerling ontvangt bij aanvang van de les een werkblad minimodule grafentheorie.

### Organisatie (les 1)

- Uitleggen wat een roosterpuzzel is (5 min).
- Laat de klas opgave 1 maken. (10 min).
- Uitleggen hoe je van een roosterpuzzel een graaf kan maken. Benadruk hierbij het abstraheren (5 min).
- De klas opgave 2 laten maken. (5 min).
- Uitleggen wat een graaf is aan de hand van de definitie. Teken hierbij op het whiteboard een plaatje van een eenvoudige graaf en geef hierbij de definiërende verzameling. Laat de klas vragen stellen (5 min).
- Laat de klas aan opgave 3, 4 en 5 werken. Opgave 6 is bestemd voor leerlingen die eerder klaar zijn met de opgaven (15min).

### Organisatie (les 2)

- Laat zes leerlingen naar voren komen en voorspel de uitkomst van Ramsey's stelling, m.a.w. voorspel dat er in dit groepje minstens drie leerlingen onderling bevriend met elkaar zijn of minstens drie leerlingen onderling niet bevriend met elkaar zijn. Vraag wie er vrienden van elkaar zijn en geef het resultaat weer in een graaf. Formuleer de grafentheoretische versie van de stelling van Ramsey. Benadruk het abstraheren (10 min).
- Bewijs de stelling van Ramsey. Teken de plaatjes van het werkblad tijdens het bewijs, ter illustratie (10 min).
- Laat de groepjes onderling discussiëren over opgave 7, bespreek de opgave daarna klassikaal (10 min).
- Introduceer het pigeonhole principle en laat de groepjes onderling discussiëren over opgave 8. Geef uiteindelijk het antwoord met een beknopte onderbouwing (5min).
- Laat de groepjes onderling discussiëren over opgave 9, bespreek de opgave daarna klassikaal (10 min).
- Indien er nog tijd is, laat de groepjes onderling discussiëren over opgave 10, bespreek de opgave daarna klassikaal of geef de opgave mee als iets om nog eens over na te denken.

## Theorie en Uitwerkingen opgaven

### Roosterpuzzels en Grafen


Een *roosterpuzzel* is een soort *Sudoku* waarbij er een aantal vakjes zijn zwart gemaakt. Hieronder zie je een voorbeeld van zo'n *roosterpuzzel*. In dit geval is het de bedoeling om in de lege vakjes een getal te zetten zodanig dat ieder getal niet meer dan eenmaal voorkomt in dezelfde rij of kolom. Het is de kunst om zo min mogelijk verschillende getallen te gebruiken. Met hoeveel verschillende getallen kan de puzzel hiernaast worden ingevuld?

	A	B	C	D	E	F	G	H	J
I									
II									
III									
IV									
V									
VI									
VII									
VIII									
IX									

De naam van de puzzel komt van de praktische toepassing ervan. Bij het maken van een schoolrooster is het de bedoeling om de docenten te koppelen aan de verschillende schoolklassen. Stel je voor dat er negen docenten zijn. We noemen ze voor het gemak even docent A, B, C, D, E, F, G, H en J. Dit zijn de kolommen in het puzzeltje. We hebben ook negen verschillende klassen. De klassen nummeren we van het Romeinse cijfer I tot en met IX. Dit zijn de rijen in het puzzeltje. De vakjes zijn combinaties van docenten en schoolklassen.

Wat lossen we nu eigenlijk op? Voor de schoolleiding is het fijn als er zo min mogelijk verschillende lessen worden gebruikt voor het rooster. Dit scheelt in de kosten. Een school hoeft dan namelijk minder lang open te blijven. Het is alleen niet mogelijk dat een docent tijdens een lesuur meerdere klassen ontvangt. Het is evenmin de bedoeling dat er meerdere docenten tegelijkertijd voor dezelfde klas komen te staan. Voor iedere klas is al wel bekend van welke docenten ze les moeten krijgen. Dit wordt aangegeven door een wit vakje. Klas I krijgt bijvoorbeeld les van de docenten A, B, D en G. Het is alleen nog niet duidelijk tijdens welk uur ze van wie les krijgen.

Door in elk wit vakje een bepaald lesuur in te vullen zodanig dat ieder lesuur slechts eenmaal in iedere rij of kolom voorkomt, wordt het gewenste rooster verkregen. Wanneer we bijvoorbeeld in het vakje op rij VIII en kolom E een 3 wordt invullen, moet klas VIII zich voor het derde uur melden in het lokaal van docent E. Voor zowel docent E als klas VIII geldt nu dat het derde uur bezet is. Als we dat met zo min mogelijk lessen kunnen doen, hebben we een optimaal rooster. In de praktijk moet een schoolrooster aan veel meer eisen en voorkeuren voldoen. Hierdoor is het maken van de ware "roosterpuzzel" een complex probleem waar ingewikkelde wiskunde bij komt kijken. Deze zit vaak verpakt in handige computerprogramma's.

 1) Verschillende antwoorden mogelijk.

## Grafen

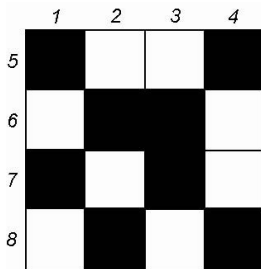
Het maken van een schoolrooster kan dus worden herleid tot het oplossen van een roosterpuzzel. De roosterpuzzel is een schematische weergave van de voorwaarden waaraan het rooster moet voldoen. De roosterpuzzel zelf kan ook weer verder worden geabstraheerd.

De roosterpuzzel die hierboven staat, blijkt gezien te kunnen worden als een graaf. De graaf is een fundamenteel wiskundig begrip. Op zich is het niet moeilijk om je een voorstelling te maken van een graaf. Een graaf is eigenlijk niet meer dan een groepje punten en een aantal lijnen tussen die punten. Hoe we de graaf verder tekenen, is niet zo belangrijk. Het is verbazingwekkend hoeveel theorie er is en wordt ontwikkeld over grafen.

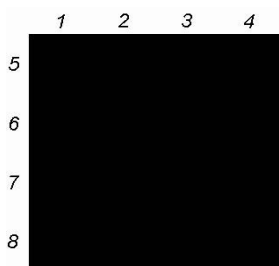
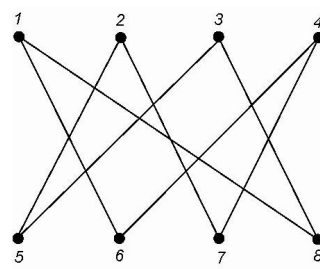
We zullen tijdens deze les daar al wel wat voorbeelden van tegenkomen. Bijvoorbeeld: van de roosterpuzzel op de vorige bladzijde kun je een graaf maken door de letters A t/m J en de Romeinse cijfers I t/m IX voor te stellen als punten. Als het vakje (D,VI) wit is, dan zijn de punten D en VI verbonden met een lijn. Hetzelfde geldt voor alle andere witte vakjes.

Het oplossen van de puzzel kan nu met behulp van de grafentheorie. Tijdens de lessenserie DisWis wordt een methode behandeld waarmee op een gemakkelijke manier zo'n puzzel wordt opgelost. We hebben dan het praktische probleem van een rooster maken vertaald naar een oplosbaar wiskundig probleem. Dit noemen we abstraheren.

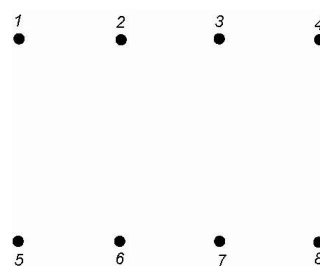
2)



Antwoord:



Antwoord:



Een graaf is een wiskundig begrip. Binnen de wiskunde worden de begrippen helder geformuleerd. Om misverstanden te voorkomen, moet deze definitie zorgvuldig worden opgesteld en van alle overbodigheden zijn ontdaan. Een graaf is niet meer dan een verzameling puntjes met eventueel wat lijnen ertussen. Deze punten en lijnen definiëren de graaf, niets meer en niets minder. Formeel ziet dit er als volgt uit:

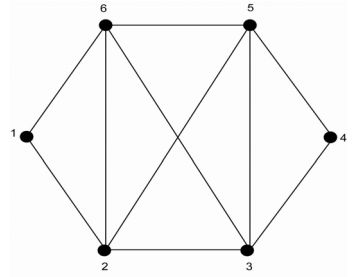
**Definitie 1: Graaf**

Een graaf  $G$  is een geordend paar  $(V,E)$  waarbij  $V$  een eindige verzameling is en  $E$  een verzameling paren uit  $V$ .

Een voorbeeld van een eindige verzameling is  $V = \{1,2,3,4,5,6\}$ . Een verzameling paren uit  $V$  kan zijn

$E = \{\{1,2\}, \{1,6\}, \{2,3\}, \{2,5\}, \{2,6\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{3,6\}, \{4,5\}, \{5,6\}\}$ . Het geordende paar  $(V,E)$  is volgens de definitie een graaf.

Je kunt je de verzameling paren als lijnen voorstellen. Een paar  $e = \{1,2\}$  is dan bijvoorbeeld de lijn die de punten 1 en 2 met elkaar verbindt. Op deze manier kun je een graaf tekenen.

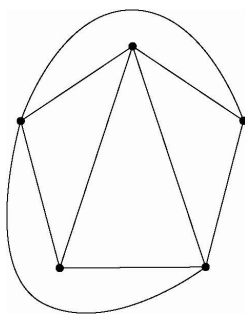
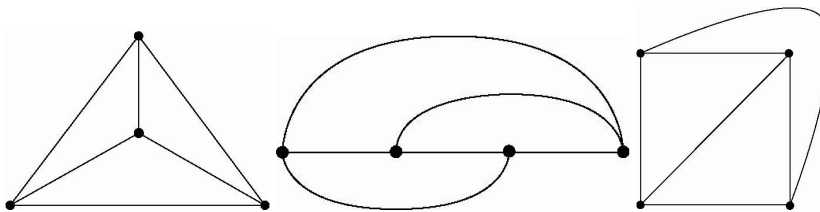


De graaf  $G = (V, E)$  zoals hiernaast beschreven

- ✎ 3a) Er zijn hier veel mogelijkheden. De verschillende webpagina's kunnen we opvatten als punten. Er loopt een lijn tussen twee webpagina's als er een link tussen beiden webpagina's bestaat.
- b) De landen kunnen we opvatten als punten. Er loopt een lijn tussen twee landen als ze aan elkaar grenzen.
- c) De karakters uit de serie kunnen we opvatten als punten. De relaties tussen de karakters kunnen we opvatten als lijnen.

✎ 4) In beide gevallen:  $(V, E) = (\{1,2,3,4\}, \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}\})$

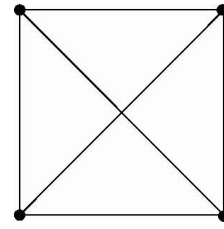
✎ 5) In het geval van 4 punten is zo'n graaf op verschillende manieren te tekenen.:



In het geval van 5 punten is zo'n graaf niet te tekenen. Laat de leerlingen het wel proberen. Loof desnoeds een prijs uit voor diegene die hem wel kan tekenen. Geef vervolgens aan waarom de graaf niet te tekenen is. Begin met de tekening links. En probeer de ontbrekende lijn te tekenen zonder dat er lijnen mogen snijden.

De lijn die nu nog getrokken moet worden zal altijd een andere lijn snijden. Benadruk wel dat dit geen echt bewijs is. Het kan rigoureuus bewezen worden, maar daarvoor is teveel voorkennis nodig.

- 6) Een volledige graaf op 4 punten heeft  $3+2+1=6$  lijnstukken. Twee grafen zijn verschillend als een ze een lijnstuk verschillen. We krijgen dus telkens een andere graaf als we een of meer van de zes lijnstukken weglaten uit de volledige graaf. Het tellen van de grafen komt dus neer op het tellen van het aantal mogelijk heden om zes lampjes, op volgorde, aan dan wel uit te zetten. Voor het eerste lampje hebben twee mogelijkheden (aan of uit).



Voor elk van de twee mogelijkheden hebben we voor het tweede lampje weer twee mogelijkheden etc. We verkrijgen zo dus: Het aantal mogelijke grafen op vier punten is:  $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^6$ . Teken bij het bespreken van deze opgave het volgende plaatje van de volledige graaf op 4 punten. Laat de leerlingen de lijnstukken in dit plaatje interpreteren als lichtjes in een LED-display.

### *Toepassingen van de grafentheorie*

Er zijn veel meer toepassingen te verzinnen van de grafentheorie. Je kunt een netwerk van mensen ook voorstellen als een graaf. De punten van de graaf zijn dan de mensen in het netwerk en twee mensen zijn met elkaar verbonden als ze elkaar kennen. Door problemen in de praktijk als een graaf te modelleren, wordt het probleem vaak een stuk overzichtelijker.

### *Ramsey's vriendenstelling*

Een andere toepassing van grafentheorie kwam van Ramsey. Frank Plumton Ramsey (1903-1930) was een Brits wiskundige hij stierf op jonge leeftijd aan een leveraandoening. Tijdens zijn leven formuleerde en bewees hij onder meer de vriendenstelling. Een erg leuk voorbeeld van hoe grafentheorie uitspraken kan doen over dingen die op het eerste gezicht niets te maken hebben met wiskunde.

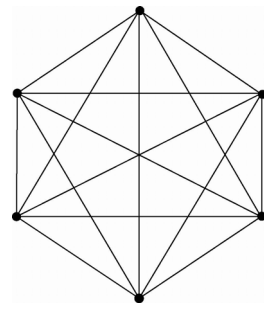
### *Ramsey's vriendenstelling:*

In elke samenkomst van zes mensen zijn er minstens drie gemeenschappelijke vrienden of drie mensen die alledrie geen vrienden van elkaar zijn.

We willen deze stelling graag bewijzen. Zoals de stelling nu geformuleerd is, zal dat niet zo makkelijk gaan. We willen de stelling graag herformuleren (abstraheren) zodat we er grafentheorie op toe kunnen passen.

*Bewijs van de Stelling van Ramsey (hierbij is de Powerpointpresentatie erg handig!)*

Laten we de mensen uit de stelling opvatten als punten in een graaf. mensen vrienden van elkaar zijn, geven we dat aan met een rode lijn corresponderende punten. Als twee mensen geen vrienden van elkaar we dat aan met een blauwe lijn tussen de punten.



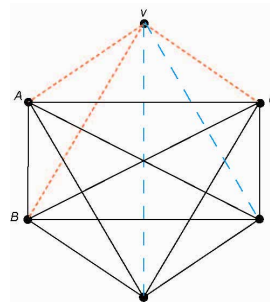
Als twee tussen de zijn, geven

In deze context wordt Ramsey's vriendenstelling:

Als je in een graaf van zes punten, waarbij alle punten met elkaar zijn, alle lijnstukken wilt kleuren met de kleuren rood en blauw, dan is een rode driehoek of een blauwe driehoek. Dit kunnen we wel

verbonden er altijd bewijzen.

Kies een willekeurig punt in de graaf en noem dit  $V$ . In dit punt komen vijf lijnstukken samen. Dit geldt namelijk voor alle punten in de graaf. Er zijn nu minstens drie van deze lijnstukken met dezelfde kleur. Er zijn namelijk vijf lijnen en twee kleuren, dus er zijn minstens drie lijnen met dezelfde kleur. We nemen nu even aan dat deze kleur rood is. Dit kunnen we zeker aannemen, omdat we de kleuren altijd nog kunnen verwisselen.



Noem de punten aan het einde van de drie lijnstukken  $A$ ,  $B$  en  $C$ . We bekijken nu de lijnstukken tussen de punten  $A$ ,  $B$  en  $C$ . Er zijn nu twee mogelijkheden:

- (1) De lijnstukken tussen deze punten zijn allemaal blauw, dan vormt  $\triangle ABC$  een blauwe driehoek.
- (2) Een lijnstuk tussen  $AB$ ,  $BC$  of  $CA$  is rood dan vormt een van de driehoeken:  $\triangle ABV$ ,  $\triangle BCV$  of  $\triangle CAV$  een rode driehoek.

Ramsey heeft deze stelling nog veel verder gegeneraliseerd. Je kunt je bijvoorbeeld afvragen hoe groot de groep mensen moet zijn zodat je altijd vier vrienden of niet-vrienden hebt. Dit getal wordt ook wel  $R(4,4)$  genoemd. Of vijf (wat we  $R(5,5)$  noemen)... Het blijkt dat zelfs de slimste wiskundigen het bij vijf al niet meer weten. Eén van de grote wetenschappers binnen de grafentheorie, de Hongaar Paul Erdős, zei zelfs eens:

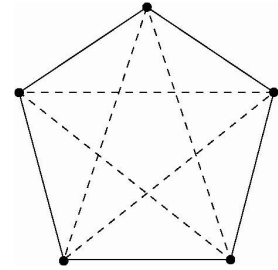
*"Imagine an alien force, vastly more powerful than us, landing on Earth and demanding the value of  $R(5, 5)$  or they will destroy our planet. In that case, we should marshal all our computers and all our mathematicians and attempt to find the value. But suppose, instead, that they asked for  $R(6, 6)$ , we should attempt to destroy the aliens".*

Je kunt op internet nog veel meer opzoeken over wat Ramsey nog meer heeft gevonden. Er is zelfs een heel vakgebied binnen de wiskunde die zich hiermee bezighoudt. Als je daar benieuwd naar bent, surf dan eens naar een van de volgende sites:

<http://nl.wikipedia.org/wiki/Ramsey-theorie>

<http://dutiaw37.twi.tudelft.nl/~kp/stukjes-pythagoras/jg44/2005-04/>

- ✎ 1) Voor groepen van minder dan vijf mensen gaat de stelling niet op. Rechts staat een tegenvoorbeeld getekend. Een doorlopende lijn betekent dat de punten bevriend zijn, een onderbroken lijn dat ze niet bevriend zijn.  
Voor groepen van meer dan zes mensen gaat de stelling wel op. zo'n groep bevat een deelgroep van zes personen. Daarvoor is de stelling geldig. Maar dan is de stelling ook geldig voor de hele groep.



### Het pigeonhole principle

De stelling van Ramsey is een generalisatie van het zogenaamde *pigeonhole principle*. Dit is een principe dat gemakkelijk te begrijpen is. Stel je eens voor dat je een duivenhouder bent. Je bent de trotse bezitter van maar liefst 25 duiven en vier doffers. Er is alleen een probleem. Er zijn maar 20 hokjes voor de vogels. Als je toch alle duiven in hokjes wilt stoppen, dan is er minstens een hokje waar twee of meer duiven in zitten. Dit is het zogenaamde "*pigeonhole principle*". Met dit principe kunnen erg veel interessante dingen bewezen worden.

- ✎ 2) Als er 5 lijnstukken zijn die met twee kleuren gekleurd moeten worden dan hebben minstens 3 lijnstukken dezelfde kleur. In de context van het pigeonhole principle zijn de hokjes de kleuren, en lijnstukken de duiven. Als we 5 duiven over 2 hokjes proberen te verdelen is er altijd een hokje waarin 3 of meer duiven terecht komen.
- ✎ 3) Het juiste antwoord is (c) 100% , want een mens heeft maximaal 150.000 haren op zijn hoofd en er wonen in Amsterdam meer dan 750.000 mensen. We vatten de inwoners van Amsterdam op als duiven die we in een hokjes willen stoppen corresponderend met het aantal haren op het hoofd. Dat doen we als volgt: mensen met 0 haren gaan in hokje 0 mensen met 1 haar in hokje 1 etc. Dan hebben we 750.000 duiven te verdelen over 150.000 hokjes. Het pigeonhole principle zegt nu dat er minstens twee duiven in hetzelfde hokje moeten zitten. Dit betekent weer dat er minstens twee mensen in Amsterdam moeten zijn met hetzelfde aantal haren op hun hoofd.
- ✎ 4a) Een mens weegt maximaal 350 kg  
Een mens is maximaal 250 cm lang  
Een mens wordt maximaal 150 jaar oud  
Er zijn dus  $350 \times 250 \times 150 = 13.125.000$  hokjes waarover we 16 miljoen duiven willen verdelen. Het pigeonhole principle geeft nu de gewenste uitspraak. Benadruk dat dit wel een heel erg grove schatting is. Hier wordt bijvoorbeeld de mogelijkheid toegelaten dat er een mens bestaat van 0 jaar oud, 250 cm lang en 0 kg zwaar.
- ✎ 4b) Er zijn  $10^4 = 10.000$  mogelijke pincodes terwijl er 16 miljoen mensen in Nederland leven. Stel dat iedereen een pinpas heeft. Nu  $\frac{16.000.000}{10.000} = 1600$  , dus er zijn minstens 1599 mensen met dezelfde pincodes.

### Na afloop van de lessenserie

Wij vragen u om de evaluatie digitaal in te vullen en te mailen naar [pwessel@science.uva.nl](mailto:pwessel@science.uva.nl). Ook verschillende op- en aanmerkingen kunt u naar dit emailadres sturen. Bij voorbaat dank, de auteurs en de eindredacteers.