


Biljarten op een ellips

Lab kist voor 3-4 vwo

its labs

een andere kijk

Dit lespakket behoort bij het ellipsvormige biljart van de ITS Academy.

Ontwerp: Pauline Vos, in opdracht van Its Academy

Juni 2011

Leerdoelen:

- kennismaken met: ellips, brandpunt
- dat je eigenschappen van vormen kunt omzetten naar formules en dat formules een manier zijn om meetkundige relaties vast te leggen.
  (dus: meetkunde ↔ algebra)

Tips aan de docent:

- het ellipsbiljart moet horizontaal staan.
- een groep van ongeveer 8-10 leerlingen kan om het biljart staan. Ze kunnen om beurten met de keu een carambole maken. Laat ze uitzoeken waar de ballen moeten liggen, zodat het ALTIJD een rake carambole via één band wordt.
  De resterende leerlingen kunnen dan alvast beginnen aan Hoofdstuk 2 en op papier ellipsen tekenen (met touw en punaise).
- als de afmetingen van het ellipsbiljart worden gemeten, moeten leerlingen erop gewezen worden dat ze meten tussen de band en niet over het laken. De ellips is 100cm x 60cm.
- handig tekenen van een ellips: laat de leerlingen eerst een lus knopen en prik daarbinnen de punaises. Toon eventueel filmpjes van YouTube die je kunt vinden met de zoekwoorden *ellipse draw string.*
- de getekende ellipsen worden altijd een beetje slordig en de regel $\mathbf{a^2 = b^2 + p^2}$ komt nooit goed uit de verf. Helaas!
- de lesbrief is getest met 3V; in een les van 50 minuten kan men tot Hoofdstuk 3 komen. Hoofdstuk 4,5 zijn dan huiswerk. Hfst 6 is terugblik.

0. Benodigdheden

Er is bij deze leskist voor een klas nodig:

Bij hoofdstuk 1:
- twee biljartballen
- een keu
- een ellipsvormige biljarttafel
- een meetlint van 1 meter

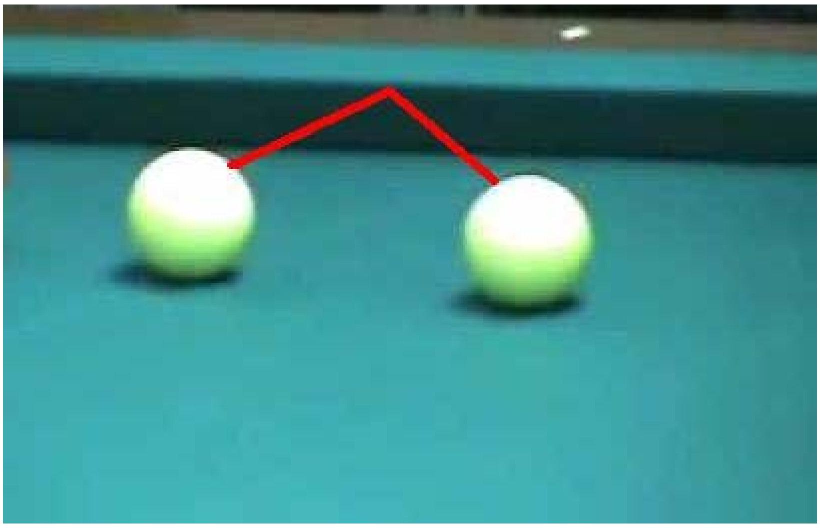
Bij hoofdstuk 2 per leerling:
- pen en kladpapier
- twee punaises
- een touwtje
- een kartonnetje om onder het papier te leggen ter bescherming van je tafel tegen de punaise
- een liniaal/geodriehoek

Bij hoofdstuk 8:
- een schaar

1a. Biljarten via één band

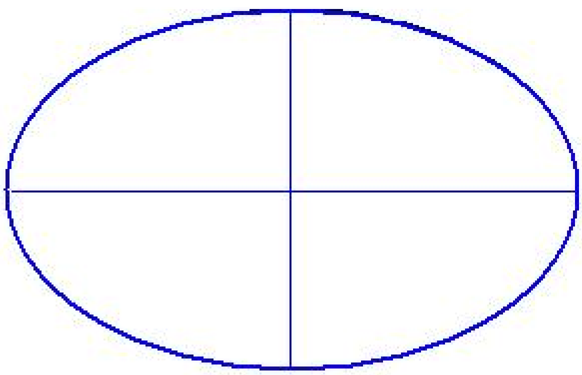
In het biljarten maakt een speler een *carambole*, d.w.z. dat je met één bal de andere bal raakt. Bij onze ellipsvormige biljarttafel moet je proberen een carambole te maken, op voorwaarde dat de eerste bal de band raakt, voordat hij de andere bal raakt.

Neem met de twee biljartballen, een keu en de ellipsvormige biljarttafel. Probeer een **carambole via de band** te maken.
Het is makkelijk als beide ballen vlak bij de rand liggen.



Maar leg de ballen eens op veel grotere afstand van de band.
Zoek uit waar je de ballen moet neerzetten zodat je succesvol een carambole via één band kunt maken.

Er zijn twee punten voor de ballen zodat je **altijd** raak schiet via de band.
Zoek die unieke posities uit en teken ze hieronder in:



1b. De afstand van de brandpunten

De twee punten waarin je in het biljart **altijd** een rake carambole via één band maakt, zijn de **brandpunten** van de ellips.

Neem nu een meetlint.

Meet aan het ellipsbiljart de afstanden:

- de lengte van de **lange as:** …………………………… - die noemen we **2a.**
- de lengte van de **korte as:** …………………………… - die noemen we **2b.**
- de **brandpuntsafstand:** …………………………… - die noemen we **2p.**
  (van het midden van de ene bal tot het midden van de andere)

Bereken nu:

- de helft van de lange as: …………………………… - die noemen we **a.**
- de helft van de korte as: …………………………… - die noemen we **b.**
- de halve brandpuntsafstand: …………………………… - die noemen we **p.**

Bereken nu:

$\sqrt{(a^2 - b^2)}$ = ……………………………

Wat valt je op?

…………………………………………………………………………………………….

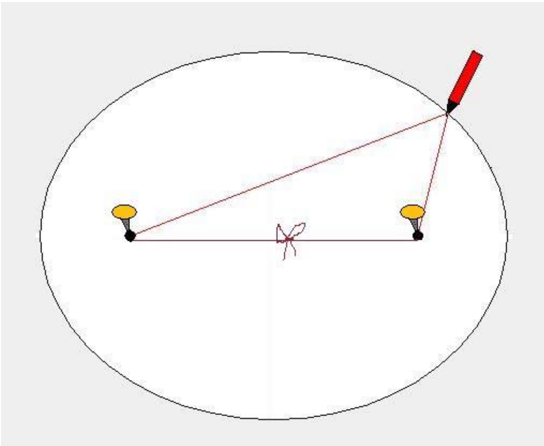
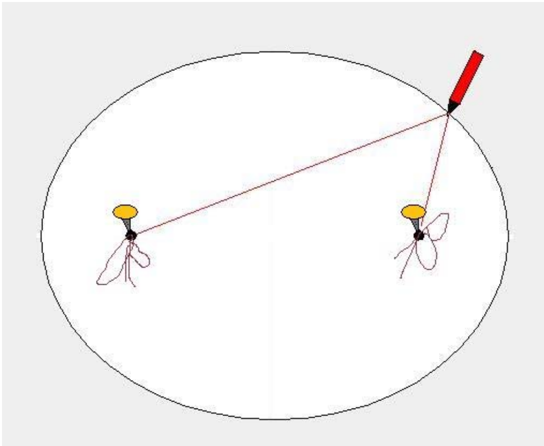
…………………………………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………………….

2. Het tekenen van een ellips

Voor het tekenen van een ellips op een A4-tje, neem je een touwtje en twee punaises. Gebruik een kartonnetje onder je papier om de tafel te beschermen.

Prik de twee punaises in het papier. Zij staan in de brandpunten van de ellips. Je hebt nu twee keuzes: knoop het touw rond en leg het om de punaises heen, of knoop het touw aan beide punaises vast. Beide is goed.

Probeer verschillende ellipsen te tekenen. Probeer ook heel langwerpige te tekenen.

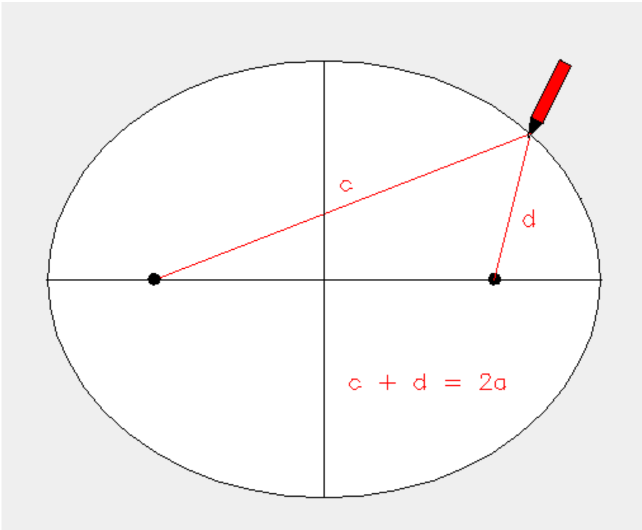
Meet van elke ellips:
- de lange as **2a**
- de korte as **2b**
- de brandpuntsafstand **2p.**
- **en vul de tabel hieronder in.**

	halve lange as **a**	halve korte as **b**	halve brandpunts-afstand: **p**	**bereken** $\sqrt{(a^2 - b^2)}$
ellips 1				
ellips 2				
ellips 3				

3a. Formules met de brandpunten

Je hebt hiervoor gemeten aan de lange en de korte as van de ellips en de brandpuntafstand. We gaan er nu formules bij maken (en redeneren).
We gaan ervan uit, dat je een touwtje had, dat vastgeknoopt zat aan twee punaises die in de brandpunten geprikt zaten.

We nemen er nog twee letters bij. Als je een ellips tekent, dan heb je een afstand **c** van je potlood tot de ene punaise en een afstand **d** tot de andere punaise.



Teken in de figuur met een ←——→ de afstand **2a.**

Geef nu een uitleg voor de volgende formule: **c+d = 2a**

Uitleg:

....

....

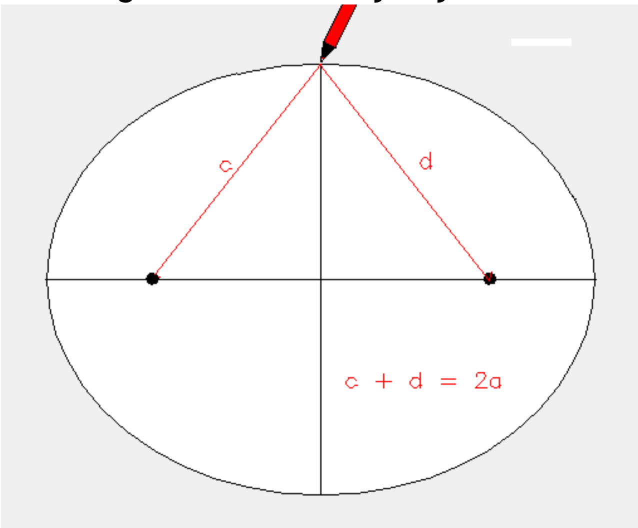
....

....

(hint 1: opgeteld zijn c en d constant, want het touwtje heeft een vaste lengte)
(hint 2: zet je potlood strak aan het touwtje helemaal rechts neer. Het touwtje bedekt dan de lange as. Welke afstanden zijn er dan?)

3b. Een rechthoek in de ellips

In het plaatje staat het potlood op de korte as. Je ziet ook de afstanden **c** en **d** die opgeteld de lengte van het touwtje zijn.



Teken in de figuur met een ⟷ de afstanden: **a, b** en **p.**

Geef uitleg voor de formule: **als c=d, dan geldt: c=d=a .**
Uitleg:

....

(hint 3: gebruik de formule van de vorige pagina)

Dus: als het potlood op de korte as staat, dan zijn **c** en **d** even lang als de halve lange as **a.**
Meet dit in bovenstaande figuur nog eens na:

- **c** = ... **d** = ... **a** = ...

Zoek in de figuur een rechthoekige driehoek. Geef de **rechte** hoek aan.

Omcirkel de letters van de rechthoekzijden: **a b c d p**

Omcirkel de letter van de schuine zijde: **a b c d p**

Laat met de Stelling van Pythagoras zien:

$\mathbf{c^2 = b^2 + p^2}$ en ook $\mathbf{d^2 = b^2 + p^2}$ en ook $\mathbf{a^2 = b^2 + p^2}$

Uitleg:

....

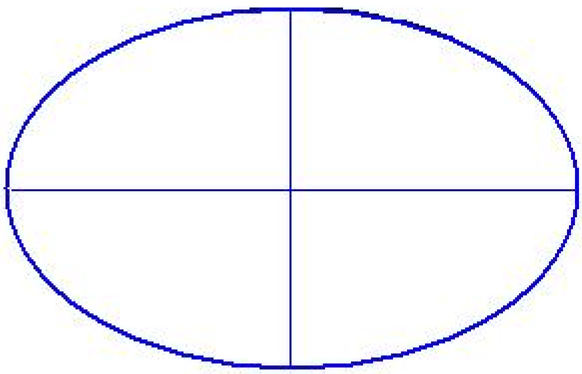
3c. Pythagoras voor ellipsen

Je hebt nu laten zien dat: $a^2 = b^2 + p^2$

Hier staat dus:

het kwadraat van de halve lange as	=	het kwadraat van de korte lange as + het kwadraat van de halve brandpunts-afstand

Meet in onderstaande ellips **a** en **b.**



Bereken de brandpuntsafstand **p** met de formule en teken daarna de <u>exacte</u> positie van de brandpunten in de ellips.

Ruimte voor de berekening:

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

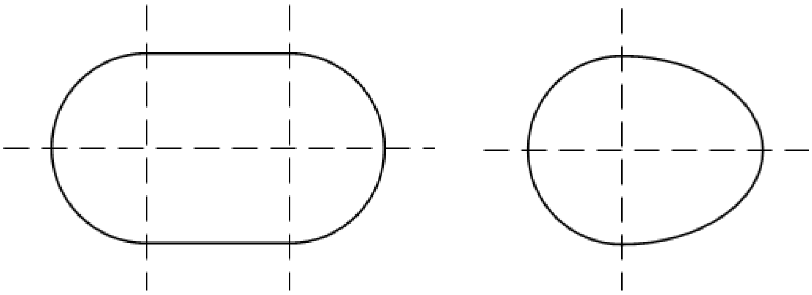
…………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………..

4. Het wiskundige vervolg (leestekst)

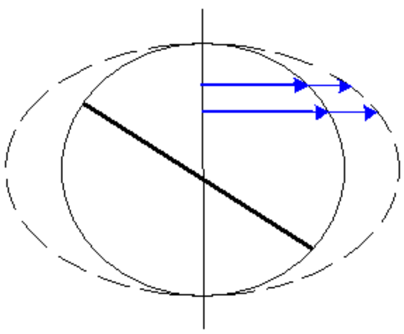
Je hebt nu een wiskundige formule voor ellipsen bewezen, namelijk een soort variant op de stelling van Pythagoras. Met $a^2 = b^2 + p^2$ heb je een relatie tussen de lengte van de assen en de brandpuntsafstand.
En: twee variabelen leggen de derde vast.

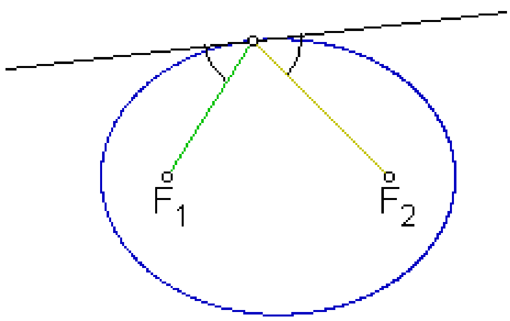
Er zijn ook ronde vormen die geen ellips zijn. Onderstaande vormen zijn geen ellipsen! Waarom niet?



Als je een cirkel in perspectief ziet (vanaf de zijkant), dan is wèl sprake van een ellips. Teken hieronder in de foto's alle ellipsen die je herkent:

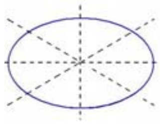
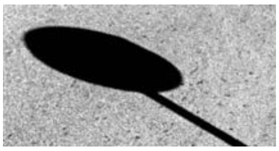
Je hebt gezien dat je een ellips met een touwtje en twee punaises kunt tekenen. Maar je kunt een ellips ook op andere manieren tekenen. Bijvoorbeeld door een cirkel te tekenen en uit te rekken. Je hebt dan geen touwtje nodig en hoeft dan geen brandpunten te zoeken. Met wiskundige technieken uit de bovenbouw kun je bewijzen dat beide manieren van tekenen ellipsen opleveren en geen andere vormen. Je moet dan *analytische meetkunde* leren. Je hebt dat ook nodig voor het bewijs dat de bal vanuit één brandpunt altijd een carambole maakt naar het andere brandpunt.





5. Oefening

Zet bij elke bewering een kruis bij “waar” of bij “niet waar”.

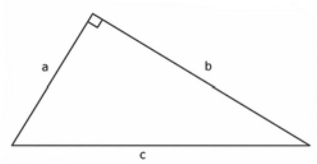
	waar	niet waar
1. Een ellips heeft 4 symmetrieassen (om te spiegelen). 	☐	☐
2. Een cirkel is een ellips waarvan de lange as gelijk is aan de korte as.	☐	☐
3. Als je een worst schuin doorsnijdt krijg je een ellips. 	☐	☐
4. Een gezicht (van een mens) is een ellips.	☐	☐
5. De schaduw van een rond verkeersbord op straat is een ellips. 	☐	☐
6. De getekende fiets op het fietspad heeft ellipswielen. 	☐	☐
7. Een getekend hart bestaat uit twee ellipsdelen. 	☐	☐
8. Het beeldscherm van een oude televisie is een ellips. 	☐	☐

6. Vormen en formules (leestekst)

In de wiskunde leer je om vormen naar formuletaal te vertalen. Dus:

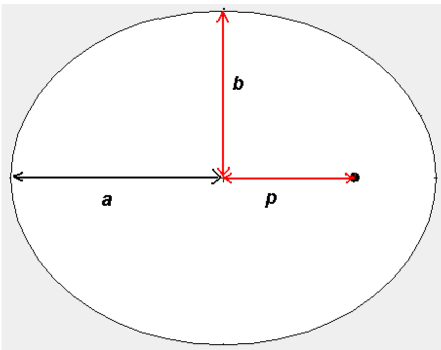
meetkunde $\leftrightarrow$ algebra

Je hebt dit al gezien bij de Stelling van Pythagoras: dan wordt de vorm van een rechthoekige driehoek (meetkunde) vertaald naar de kwadraten van de zijdes (algebra).



$\leftrightarrow$ $\mathbf{a^2 + b^2 = c^2}$

Bij de ellips hebben we ook een formule afgeleid, namelijk voor de halve brandpuntsafstand en de halve afstanden van lange en korte as.



$\leftrightarrow$ $\mathbf{a^2 = b^2 + p^2}$

Dus: meetkunde $\leftrightarrow$ algebra

7. Verdere ellips-weetjes (leestekst)

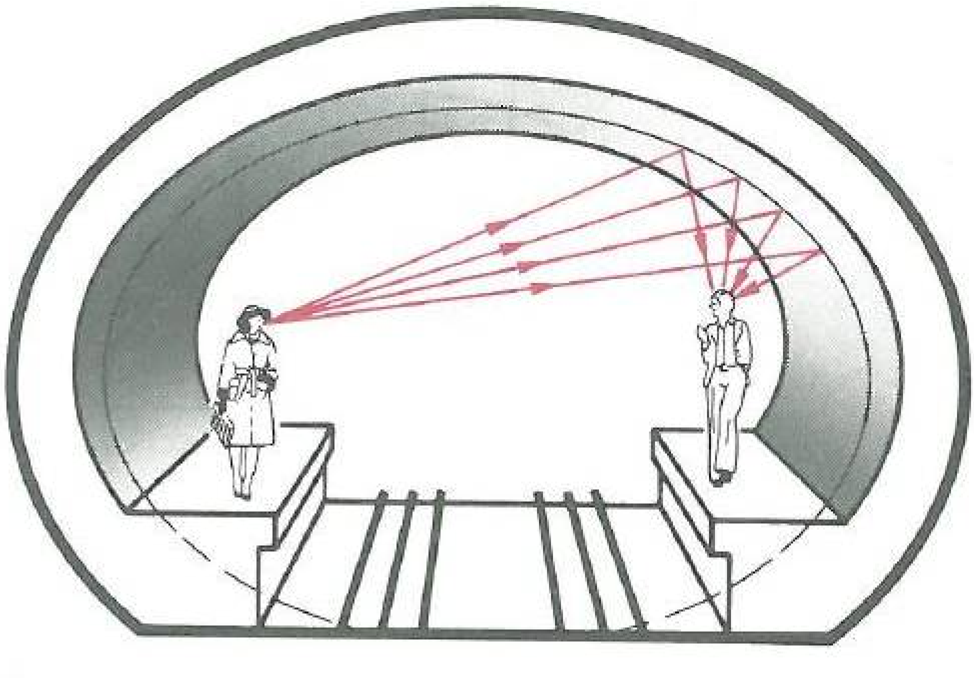
De **oppervlakte** van een ellips bereken je met de eenvoudige formule πab.

De **omtrek** van een ellips is heel lastig te berekenen, de volgende formule is een benadering, bedacht door de Indiase wiskundige Srinivasa Ramanujan:

$$\pi \left[\, 3(a+b) - \sqrt{(3a+b)(a+3b)}\, \right]$$

In de **sterrenkunde** kom je ook ellipsen tegen: de baan van de aarde om de zon, en ook andere planeetbanen om de zon, hebben de vorm van een ellips. De zon zit in één van de brandpunten. Ook de maan draait in een ellipsbaan om de aarde.

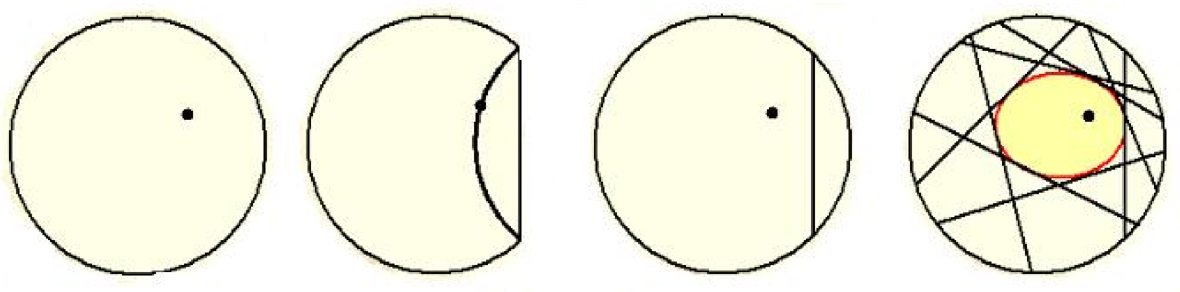
In de **natuurkunde** kom je ellipsen tegen in de geluidstheorie (*acoustiek*): als je binnen een ellipsvormige ruimte een geluidsbron in een brandpunt plaatst en de ontvanger in het andere brandpunt, dan krijg je door de weerkaatsing van het geluid tegen de binnenwand een supergeluid!
Het weerkaatsingprincipe van een ellips wordt ook wel in concertzalen toegepast.



8. Een ellips vouwen (doe-tekst)

Je kunt ook een ellips **vouwen**! Benodigdheden: schaar en een stuk papier dat de vorm heeft van een cirkel.
Teken hieronder in het witte deel een grote cirkel en knip deze uit.

Zet op een willekeurige plaats binnen de cirkel een punt ***P*** (niet in het middelpunt!). Vouw vervolgens de rand om zodat een punt van de rand precies op punt ***P*** ligt. Vouw weer terug en je ziet een vouwlijn binnen de cirkel.
Doe dit nog een aantal maal (steeds verschillende randpunten op punt ***P*** leggen). Maak heel veel vouwlijnen en alle vouwlijnen omsluiten een ellips.



Punt ***P*** is één van de brandpunten.