De didactiek van het inproduct

18 maart 2021

Jan Keemink

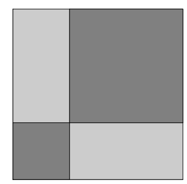
Samenvatting

Als je de schoolboeken erop naslaat, lijkt het alsof er maar twee manieren zijn om het inproduct te introduceren:
met de definitie: $u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2$ en dan de afleiding: $u \cdot v = |u||v|\cos(\phi)$,
of andersom:
met de definitie: $u \cdot v = |u||v|\cos(\phi)$ en dan de afleiding: $u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2$.

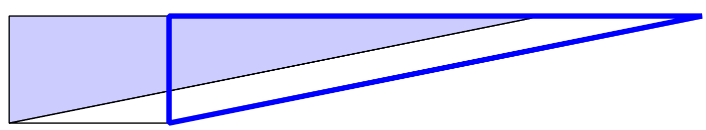
Het kan anders!

Het inproduct van twee vectoren kan zichtbaar gemaakt worden als een oppervlakte. Maar dan moet één van beide vectoren 90° worden gedraaid. Omdat zo'n draaiing als "onnatuurlijk" kan worden gezien, wordt eerst een aantal voorbeelde besproken waarin een draaiing van lijnstukken als de gewoonste zaak van de wereld is.

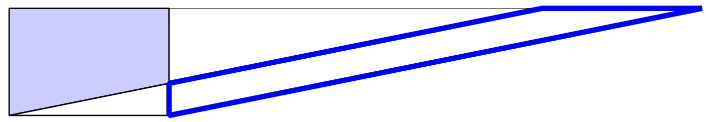
Kijk maar hoe wij -docenten- uitleggen waarom $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ is. Dan maken we toch vierkantjes van een lijnstuk met lengte a etc., met andere woorden, om een oppervlakte uit te beelden tekenen we een lijnstuk nogmaals, maar dan loodrecht zichzelf.



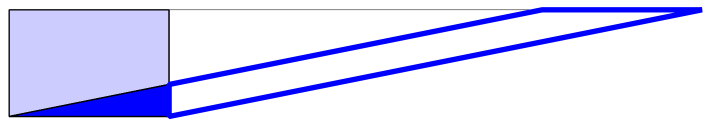
Oppervlakte als concept is heel fundamenteel en de Grieken onderzochten al welke transformaties van meetkundige vormen de oppervlakte invariant lieten (anachronistisch taalgebruik).
Zo is er het inzicht dat de oppervlakte van een parallellogram niet verandert als het schuiner wordt getekend zolang de afstand tussen de evenwijdige lijnen maar niet verandert. Het is zo eenvoudig niet om een bewijs te vinden dat in alle gevallen werkt. Euclides is het (voor parallellogrammen breder dan 2 maal de basis) gelukt!



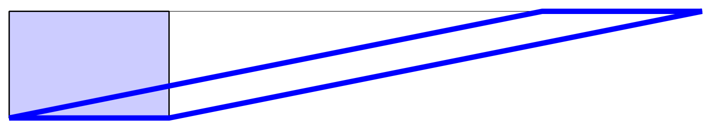
Congruente driehoeken dus gelijke oppervlakten:



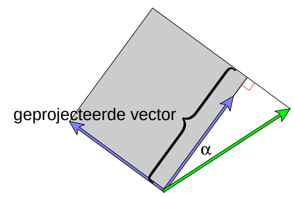
gemeenschappelijk deel weghalen:



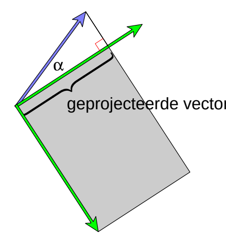
eenzelfde deel toevoegen:



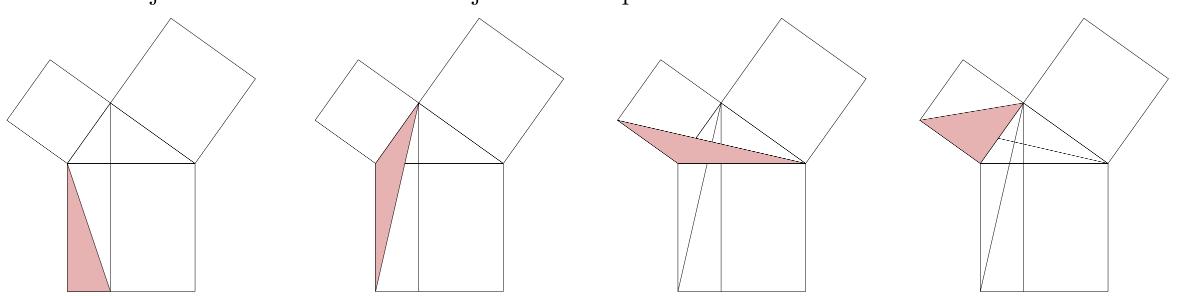
nog steeds gelijke oppervlakte:



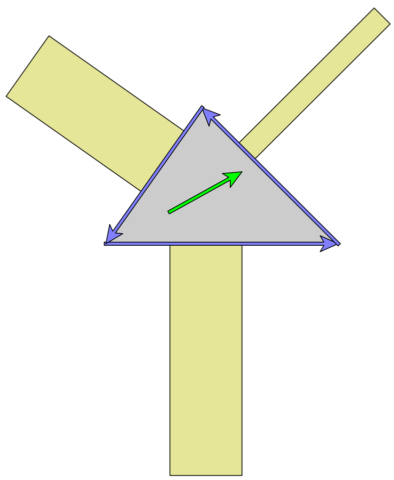
Het recept voor ”maak het inproduct zichtbaar” is:
Roteer één van beide vectoren over 90°
Projecteer de andere vector op de nog-niet-geroteerde
Het inproduct is de oppervlakte van de rechthoek geprojecteerde vector maal geroteerde vector.



Formule: $u \cdot v = |u||v|\cos(\alpha)$.
Aan de formule is meteen te zien dat $u \cdot v = v \cdot u$, dus dat de bewerking commutatief is; meetkundig is dat minder makkelijk. Heel bijzonder is dat het bewijs zoals dat in Euclides’ Elementen te lezen is van de stelling van Pythagoras, precies het bewijs is van het commutatief zijn van het inproduct.

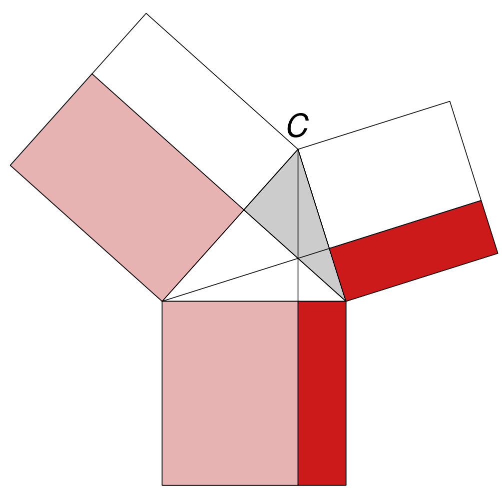


Zoals de cosinus-regel een algemener geval is van de stelling van Pythagoras, zo laat de figuur hieronder een stelling zien die weer algemener is dan de cosinusregel. De som van de oppervlaktes is nul, omdat de som van de blauwe vectoren nul is. En de bovenste oppervlaktes zijn negatief omdat de samenstellende vectoren tegengesteld zijn. Daarom is de onderste oppervlakte gelijk aan de som van de andere twee.

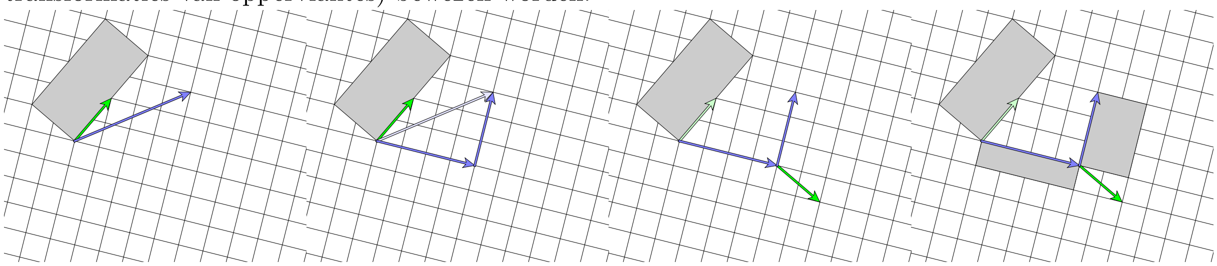


Opgave

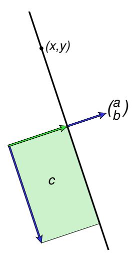
Laat mbv inproducten zien dat gelijk gekleurde oppervlaktes gelijk zijn en toon vervolgens de cosinusregel $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$ aan.



Als we coördinatenstelsel aanbrengen, kunnen we het inproduct ook berekenen met de formule $u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2$. Ook dit kan meetkundig (dwz met transformaties van oppervlaktes) bewezen worden.



Met deze formule in het achterhoofd, kunnen we de vergelijking van een lijn $ax + by = c$ ook opvatten als het inproduct van een (onbekende) vector $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ met de vector $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.



Hieruit leiden we af:

- De punten (x, y) liggen op een lijn, loodrecht op de vector $\binom{a}{b}$
- De afstand van O tot de lijn is $\dfrac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$
- De coördinaten van de projectie van O op de lijn volgen uit $\frac{c}{a^2+b^2}\binom{a}{b}$.